Matière : Math. Année scolaire : 2010-2011

Classe : S.V

Exercice I (3,5points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives : $z_A = 2$; $z_B = 1+i$ et $z_C = 3+3i$

1)a) Écrire z_B et z_C sous forme exponentielle.

b) Montrer que le triangle *ABC* est rectangle en *B*.

2) Pour tout point *M* ($\neq$*B)* d'affixe *z* on associe le point *M'* d'affixe z' tel que $z' = 2iz + 3 - i$.

a) Montrer que $\dfrac{z' - z_B}{z - z_B} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) En déduire la nature du triangle *BM M'*

Exercice II (4,5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ .Soient les points A(1;3;4)et B(2;2;0)

1) Démontrer que le triangle OAB est rectangle en B .

2) Écrire une équation cartésienne de P_1=(OAB)..

3)a- Vérifier que le plan P_2 d'équation x+3y+4z-13=0 est le plan médiateur du segment [OA].

b- Déterminer une équation du plan P_3, le plan médiateur du segment [OB].

4) a- Vérifier que la droite (Δ) de représentation paramétriques : x= -2t +5/2 , y=2t-1/2 , z= -t+3 est l'intersection de . (P_2) et (P_3).

b- Quelle est la caractéristique géométrique des points de (Δ).

5) On considère le point S$\left(\frac{9}{2},\frac{-5}{2},4\right)$.

a- Vérifier que S appartient à (Δ).

b- Déterminer le volume du tétraèdre SOAB.

6) a- Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection des plans P_1,P_2et P_3.

b- Quelle est la position de H dans le triangle OAB ?

Exercice III(4,5 points)

Sur son trajet quotidien qui le conduit de son domicile à son lieu de travail, un automobiliste rencontre deux feux tricolores. Si le signal est vert, il passe, si le signal est orange ou rouge, il s'arrête.

On note : – A_1 l'évènement : « l'automobiliste s'arrête au premier feu ».

– A_2 l'évènement : « l'automobiliste s'arrête au deuxième feu ».

On note $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$ les évènements contraires des évènements A_1 et A_2 .

1. Lorsque l'automobiliste se présente au premier feu, la probabilité que le signal soit orange est $\frac{1}{6}$ la probabilité qu'il soit rouge est $\frac{1}{3}$

a. Quelle est la probabilité que l'automobiliste s'arrête au premier feu ?

b. Quelle est la probabilité qu'il passe sans s'arrêter au premier feu ?

2. Si l'automobiliste s'est arrêté au premier feu, la probabilité qu'il s'arrête également au deuxième feu est $\frac{1}{2}$; s'il ne s'est pas arrêté au premier feu, la probabilité qu'il s'arrête au deuxième feu est $\frac{1}{3}$

a. Illustrer cette situation par un arbre pondéré.

b. Démontrer que la probabilité que l'automobiliste ne s'arrête pas sur son trajet est $\frac{1}{3}$

c. Calculer $P\,(A_1 \cap A_2)$ et $P(\overline{A_1} \cap A_2)$; en déduire $P\,(A_2)$.

d. L'automobiliste s'est arrêté au deuxième feu. Quelle est la probabilité qu'il se soit également arrêté au premier feu ?

3. Si l'automobiliste effectue le trajet sans s'arrêter, celui-ci dure neuf minutes, s'il s'arrête une fois, douze minutes, et s'il s'arrête deux fois, quinze minutes.

a. Déterminer la loi de probabilité de la durée du trajet.

b. Déterminer la durée moyenne du trajet.

Exercice IV (7,5 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{1}{2}$, sa courbe représentative dans un repère ortho normal est Notée C_f .

1- Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, interpréter graphiquement .

2- Étudier la variation de f .

3- Démontrer que f(-x)+f(x)=0 . Qu'en déduit-on pour C_f?.

4- Déterminer le signe de f(x) selon les valeurs de x .

Partie B

On considère la fonction g définie sur IR par $g(x)=\ln(e^x+1)-\frac{1}{2}x$. sa courbe représentative dans un repère ortho

Notée C_g .

1- Prouver que, pour tout x, g(x)= $\ln(1+e^{-x})+\frac{1}{2}x=\ln(e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{-x}{2}})$.

2- Vérifier que g'(x)=f(x) pour tout x, En déduire les variations de g .

3- a)Calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Prouver qu'en +∞ la droite (D) : $y=\frac{1}{2}x$ est asymptote à C_g.

c) Étudier la position relative de C_g et (D) .

4) Démontrer que la fonction g est paire . Qu'en déduit-on pour C_g? En déduire l'équation de l'asymptote oblique à C_g en -∞.

5) Tracer C_g avec ses asymptotes.

Matière : Math. Année scolaire : 2010-2011

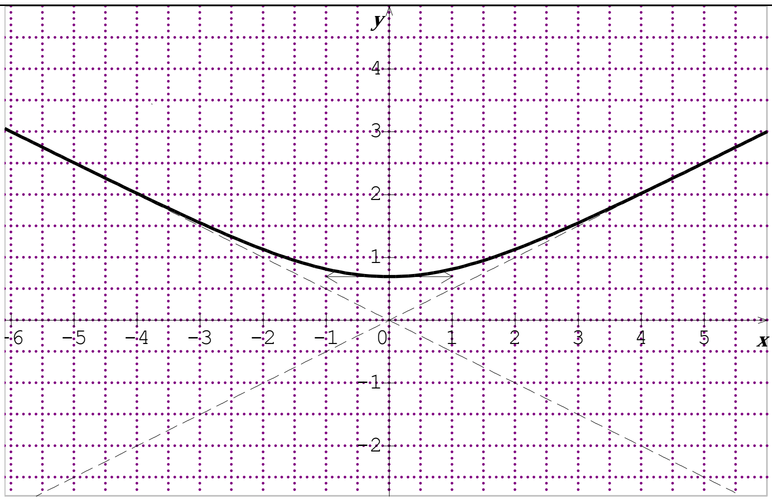
Classe : S.V.

№	Réponses	Note
I	1-a) $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ $z_C = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$	1
	b) $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = \frac{1-i}{2(1+i)} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ donc ABC triangle rectangle en B	1
2	a) $\frac{z' - z_B}{z - z_B} = \frac{2iz+2-2i}{z-1-i} = \frac{2i(z-1-i)}{z-1-i} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$	1
	b- BMM' triangle en B	1/2
II	1- $\overrightarrow{AB}(1;-1;-4)$ $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{OB} = 0$ donc triangle rectangle en B	1/4
	2- $P_1 : \overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) = 0$ =2x-2y+z=0	1/2
	-3a- I(1/2;3/2;2) milieu de [OA] et I $\in P_2$ et $\overrightarrow{OA} = \vec{N}_{P_2}$ donc x+3y+4z-13=0 équation du plan P_2 ou $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{OA}$=0 = x+3y+4z-13= 0	1/2
	b- J(1;1;0) milieu de [OB] et $\overrightarrow{OB} = \vec{N}_{P_3}$ donc $\overrightarrow{JM} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ =x+y-2=0	1/2
	4- a-$(\Delta) = (P_2) \cap (P_3)$ ssi $(\Delta) \subset (P_2)$ et $(\Delta) \subset (P_3)$ vérification par calcule	1/2
	b- Un point de (Δ) équidistant de O , A et B donc (Δ) est l'axe du cercle circonscrit au	1/4

<table>
<tr><td></td><td>triangle OAB</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>a- S$\in(\Delta)$ ssi les coordonnées de S vérifier l'équation de (Δ)(t=-1)
OU S$\in P_2$ et S$\in P_3$ donc S$\in(\Delta)$</td><td>1/4</td></tr>
<tr><td></td><td>b- $V_{SOAB}=\dfrac{base\times hauteur}{3}=\dfrac{A_{OAB}\times h}{3}=\dfrac{OB\times AB\times h}{6}=12$
OU $V_{SOAB}=\dfrac{\left|\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OS})\right|}{6}=12$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td>a-{H} = $P_1\cap(P_2)\cap(P_3)$= $P_1\cap(\Delta)$ car $(\Delta)=(P_2)\cap(P_3)$ ce qui donne H(1/2;3/2;2)
OU bien les coordonnées de H sont des solutions du système $\begin{cases}2x-2y+z=0\\x+3y+4z-13=0\\x+y-2=0\end{cases}$</td><td>1/2</td></tr>
<tr><td></td><td>b- H est le centre du cercle circonscrit au triangle OAB donc H est le milieu de [OA]</td><td>1/4</td></tr>
<tr><td>III</td><td>1) a- P(s'arrête au premier feu) =P(rouge ou orange) = p(rouge)+p(orange)=1/6+1/3=1/2</td><td>1/4</td></tr>
<tr><td></td><td>b- P(vert) = 1-1/2=1/2</td><td>1/4</td></tr>
<tr><td></td><td>2- a) arbre</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>b) $P(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$</td><td>1/4</td></tr>
<tr><td></td><td>c) $P(A_1\cap A_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$ et $P(\overline{A}_1\cap A_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$
$P(A_2)=P(A_1\cap A_2)+P(\overline{A}_1\cap A_2)=\dfrac{5}{12}$</td><td>3/4</td></tr>
<tr><td></td><td>d) $P(A_1/A_2)=\dfrac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_2)}=\dfrac{3}{5}$</td><td>1/2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>a- P(X=9)= $P(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2)=\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{12}$, P(X=12) = $P(A_2)=\dfrac{5}{12}$ et
P(X=15) = $P(A_1\cap A_2)=\dfrac{1}{4}$
<table><tr><td>x</td><td>9</td><td>12</td><td>15</td><td>total</td></tr><tr><td>p</td><td>4/12</td><td>5/12</td><td>3/12</td><td>1</td></tr></table></td><td>1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>b- E(X) = $\sum x_i p_i$ =11,75 minutes</td><td>1/2</td></tr>
<tr><td>IV</td><td>1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{-1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{2}$ donc y =-$\frac{1}{2}$ A.H et y =$\frac{1}{2}$ A.H</td><td>3/4</td></tr>
<tr><td></td><td>2) $f'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ >0 donc f strictement croissante</td><td>1/2</td></tr>
<tr><td></td><td>3) f(-x)+f(x)= $\frac{1}{1+e^x}-\frac{1}{2}+\frac{e^x}{1+e^x}-\frac{1}{2}=1-1=0$ ce qui donne f(-x)=-f(x) donc f impaire

O(0 ;0) centre de symétrie</td><td>1/2</td></tr>
<tr><td></td><td>4) f(x)=0 ssi x= 0 , f(x) >0 ssi x>0 , f(x) <0 ssi x<0</td><td>1/2</td></tr>
<tr><td>B</td><td>1) g(x) = $\ln(e^x+1)-\frac{1}{2}x=\ln e^x(1+e^{-x})=x+\ln(1+e^{-x})-\frac{1}{2}x=\ln(1+e^{-x})+\frac{1}{2}x$
g(x)= $\ln(e^x+1)-\frac{1}{2}x=\ln e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{-x}{2}})-\frac{1}{2}x=\frac{x}{2}+\ln(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})-\frac{1}{2}x=\ln(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})$</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>2) $g'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{1}{2}=f(x)$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ 0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>g'(x)</td><td>-   0   +</td></tr>
<tr><td>g(x)</td><td>$+\infty$ ↘ ln2 ↗ $+\infty$</td></tr>
</table></td><td>3/4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$</td><td>1/4</td></tr>
<tr><td></td><td>b) $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-\frac{1}{2}x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=\ln 1=0$ donc y =0,5x A.O</td><td>1/2</td></tr>
<tr><td></td><td>c) $[g(x)-\frac{1}{2}x]=\ln(1+e^{-x})>0$ car 1+e^{-x} >1 donc la courbe au dessus de l'asymptote</td><td>1/2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>g(-x)=g(x) donc g est impaire y'oy axe de symétrie y = -0,5x</td><td>1/2</td></tr>
</table>

5	 y 4 3 2 1 -6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 x −1 −2	1