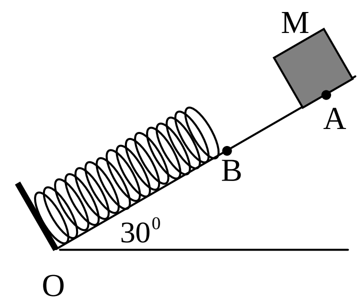
Exercices et Problèmes de renforcement en Mécanique

I – Un ressort de raideur k = 90 N/m et de longueur à vide L_0 = 40 cm, fixé par une de ces deux extrémités en un point O, d'un plan, incliné de 30^0 sur l'horizontal, comme l'indique la figure ci-contre. Un corps, de masse M = 600 g, est placé au point A sur le plan incliné tel que OA = 1 m.
On néglige les frottements entre la masse M et le plan incliné.
Le point B est sur le référence d'énergie potentielle de pesanteur.

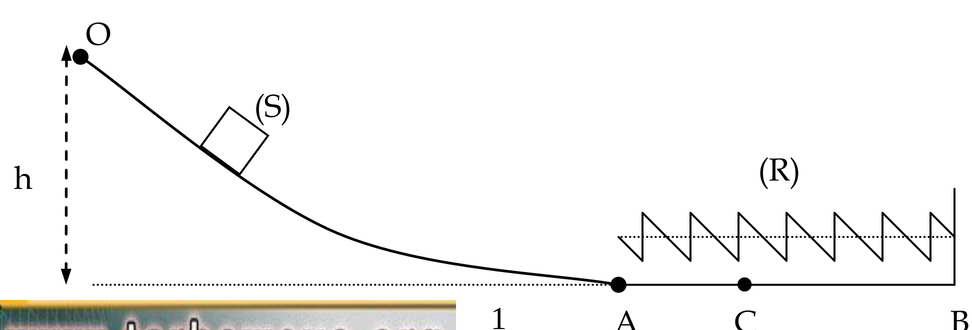


a) Calculer l'énergie mécanique du système S(Terre – ressort – support – masse M).
b) Calculer la vitesse de la masse M au point B.
c) Lorsque la masse M atteint le ressort en B, le ressort commence à se comprimer. Calculer la compression maximale du ressort.
d) Déterminer les positions de M où l'énergie cinétique égale à l'énergie potentielle.

II – Energie cinétique d'un chariot
On considère :
- un solide parallélépipédique (S) de masse M = 220 g ;
- un chariot (C) de masse M = 220 g. Le chariot est formé d'une caisse de masse m = 100 g et de quatre roues de masse m' = 30 g chacune ;
- un ressort (R), à spires non jointives, de raideur k = 10 N/m ;
- un rail OAB, situé dans le plan vertical, dont l'arc OA est de longueur ℓ = 80 cm, la hauteur entre O et A est h = 25 cm et le segment AB est horizontale.

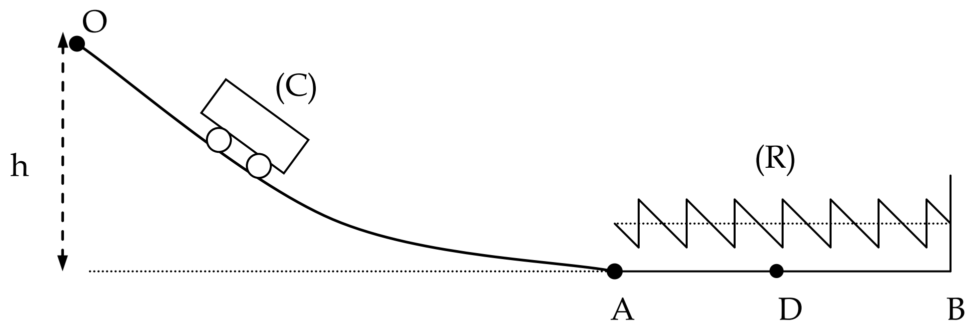
Le niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur est pris sur le plan horizontal passant par AB. Prendre g = 10 m/s^2.

Première expérience
(S) est au sommet O du rail, lâché sans vitesse, atteint A puis se déplace pour comprimer le ressort d'une longueur x_1 = AC = 10 cm.



1) Calculer l'énergie mécanique du système [(S) ; Terre ; support ; ressort], quand (S) est en O puis en C.
2) Vérifier l'existence d'une force de frottement entre le rail et (S).
3) Calculer le travail de la force de frottement, supposée constante, sur le trajet OAC. En déduire sa valeur f.
4) Déduire la vitesse de (S) quand il passe pour la première fois par A.

Deuxième expérience
(C) est au sommet O du rail, lâché sans vitesse, atteint A puis se déplace pour comprimer le ressort d'une longueur x_2 = AD.



Les roues du chariot ne peuvent rouler s'il n'y a pas des frottements, mais on admet que le travail de ces frottements sur les roues est nul.

1) L'énergie mécanique du système [(C) ; Terre ; support ; ressort] est-elle conservée ? Justifier.
2) Calculer l'énergie cinétique de (C) lorsqu'il passe par A et la valeur de x_2.
3) Des cellules électroniques évaluent la vitesse de (C) en A par 2,622 m/s.
La formule $E_C = ½\, MV^2$, appliquée sur (C), est-elle vérifier ? Justifier.
4) Sachant que la vraie formule est $E_C = ½\, \alpha V^2$ où α est une constante à déterminer.
5) Est-il facile d'arrêter un chariot ou un solide glissant ? Expliquer.

III – Une arme à feu est capable de tirer des balles, chacune de masse m = 20 g, avec une vitesse horizontale $\overrightarrow{V_0}$ de valeur V_0.
Dans le but de déterminer V_0, on considère un dispositif constitué d'un bloc de bois, de masse M = 1 kg, suspendu à deux fils inextensibles, de masse négligeable et de même longueur (figure 1).
Ce dispositif peut être assimilé au bloc de bois suspendu à un fil de longueur ℓ = 1 m, initialement au repos dans sa position d'équilibre en G_1.
Une balle frappe le bloc à la vitesse $\overrightarrow{V_0}$ et s'y incruste au niveau du centre de gravité G du bloc. Juste après le choc, le système (bloc, balle) se met en mouvement à la vitesse $\overrightarrow{V_1}$ horizontale. Le pendule atteint alors un écart angulaire maximal $\alpha = 37^o$. G_1 et G_2 sont les positions respectives de G à la position d'équilibre et à la position la plus élevée. Prendre le plan horizontal passant par G_1 comme niveau de référence de l'énergie

potentielle de pesanteur (figure 2). Négliger les frottements avec l'air et prendre g = 9,8 m/s^2.

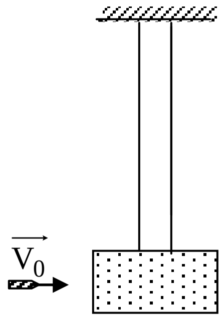


Figure 1

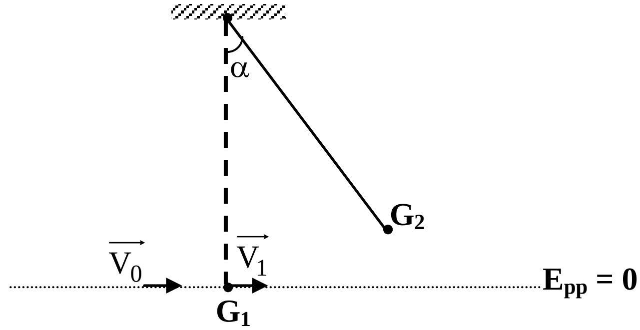
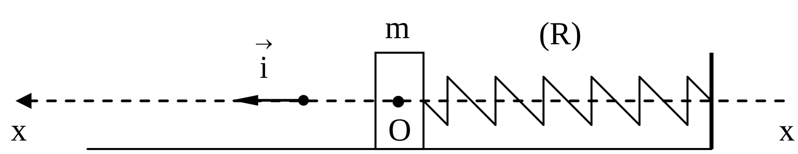


Figure 2

1. Au cours d'un choc, laquelle des deux grandeurs physiques, la quantité de mouvement ou l'énergie cinétique du système, n'est pas toujours conservée?
2. Déterminer l'expression de la valeur V_1 de la vitesse $\overrightarrow{V_1}$ en fonction de M, m et V_0.
3. **a)** Déterminer, juste après le choc, l'énergie mécanique du système (pendule, Terre) en fonction de V_0, M, et m.
   b) Déterminer, en fonction de M, m, g, ℓ et α, l'énergie mécanique du système (pendule, Terre)
   au point G_2.
   c) Déduire V_0.
4. Vérifier la réponse à la question (1).

IV – Un pendule élastique horizontale est formé d'une masse m = 250 g et d'un ressort de k. Le centre d'inertie G de la masse m est repéré par son abscisse x sur axe horizontal x'Ox où O est la position d'équilibre de G comme l'indique la figure 1.



M est au repos en O, à la date $t_0 = 0$ pris comme origine des dates, on lance m à la vitesse $\vec{V}_0$, m entre en oscillations libres.

Partie A

Le niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur est le plan horizontal passant par G.

1) Donner l’expression de l’énergie mécanique du système [m, (R), Terre] en fonction de m, k, x et la vitesse V de m.
2) Donner l’expression de l’équation différentielle qui régit les oscillations libres nom amortis de m. En déduire l’expression de période propre du pendule.

Partie B

On représente l’évolution de l’abscisse x des oscillations de m en fonction du temps sur deux surfaces dont l’une est lisse (figure 2) et l’autre est rigoureux (figure 3).

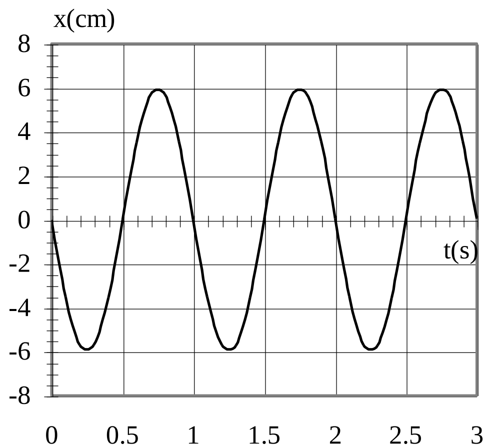


Figure 2

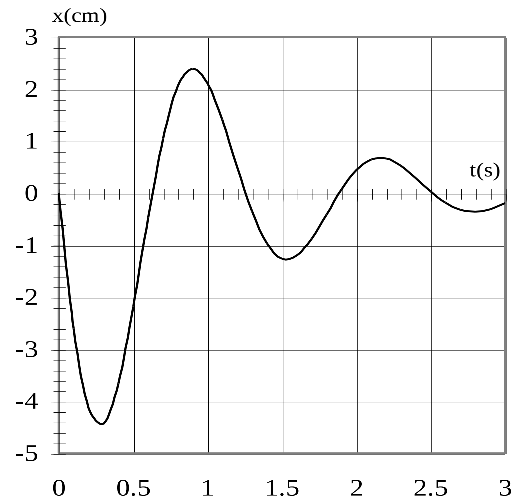
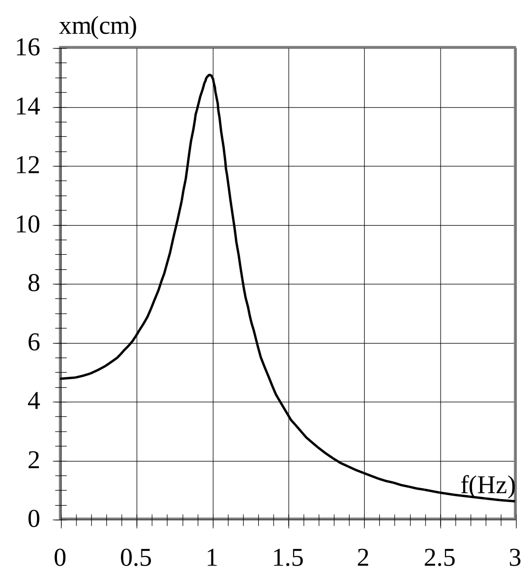


Figure 3

1) Quelle est, en justifiant, la nature des oscillations dans chaque figure ?
2) Calculer, dans chaque situation des figures 2 et 3, la période des oscillations.
3) Déduire la valeur du raideur k du ressort.
4) Quel est, à partir des figures, le sens du mouvement de m à la date $t_0 = 0$ par rapport à l’axe x’Ox ?
5) La conservation de l’énergie mécanique et appliquée sur l’une des situations dans les figures 2 ou 3. Calculer la valeur de la vitesse $\vec{V}_0$.
6) Déduire la valeur de la force de frottement, supposée constante, exercée par le support rigoureux sur m entre les dates $t_0 = 0$ et t = 0,2 s.



Partie C

L’extrémité, de (R), non attaché à m, est articulée par un axe horizontal permettant de transmettre des impulsions énergétiques à une

fréquence réglable f à partir d'un moteur électrique comme l'indique la figure 3.
L'évolution de l'amplitude maximale x_m en fonction de la fréquence f du moteur est donnée dans la figure 4.

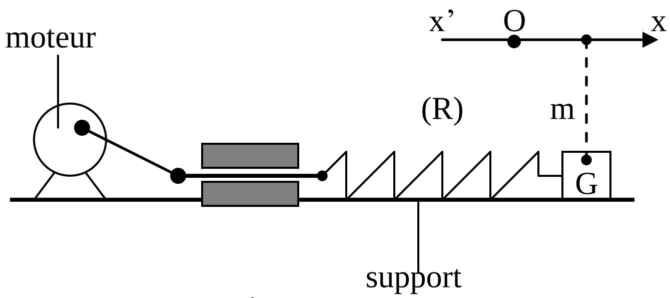
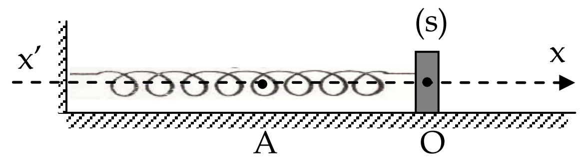


Figure 3 **Figure 4**

1) Indiquer l'excitateur et le résonateur.
2) Quel est le non du phénomène mis en évidence ? Donner la valeur de la fréquence f_R qui caractérise ce phénomène.
3) Comparer les valeurs de f_R et de la fréquence propre f_0 du pendule. En déduire la nature de l'amortissement (moyen, faible).

V – Un pendule élastique horizontal, d'axe x'Ox, est formé d'un ressort (R) à spires non jointives, de raideur k = 40 N/m et d'un solide (s) de masse m = 100 g. Le solide (s) se déplace sur un support horizontal AB comme le montre la figure(1).



Figure(1)

Le plan horizontal passant par MN est pris comme référence pour l'énergie potentielle de pesanteur. Prendre g = 10 m/s^2.

On écarte le solide (s) de sa position d'équilibre en O jusqu'au point A tel que : $\overline{OA} = -8\,\text{cm}$ et on le relâche sans vitesse initiale à la date $t_0 = 0$.
A la date t > 0, la position de (s) est repérée par son abscisse x sur x'Ox.

On désigne par S le système (Terre – pendule – support).

Partie I
Etude théorique d'un oscillateur harmonique

Dans cette partie on rend le support MN lisse et on néglige le frottement.

a) Calculer l'énergie mécanique du système S à la date $t_0 = 0$.
b) Calculer la valeur algébrique de la vitesse de (s) lorsqu'il passe la première fois par O.

c) Donner, en fonction de m, k, x et $\dot{x}$, l'expression de l'énergie mécanique du système S à la date t.
d) Trouver l'équation différentielle qui régit le mouvement de (s), en déduire l'expression de la période propre T_0 de l'oscillateur. Calculer T_0.
e) Donner la solution x(t) de l'équation différentielle.
f) Compléter le tableau ci-dessous :

t	0	$T_0/4$	$T_0/2$	$3T_0/4$	T_0
x (cm)			8		
$\overline{V}$ (cm/s)				-160	

g) Construire la courbe représentant $\overline{V}$ en fonction de la position x du solide (s).
Echelle : En ordonnée : 1 cm ↔ 40 cm/s
En abscisse : 1 cm ↔ 2 cm

Partie II

A - Etude expérimentale des oscillations libres amorties

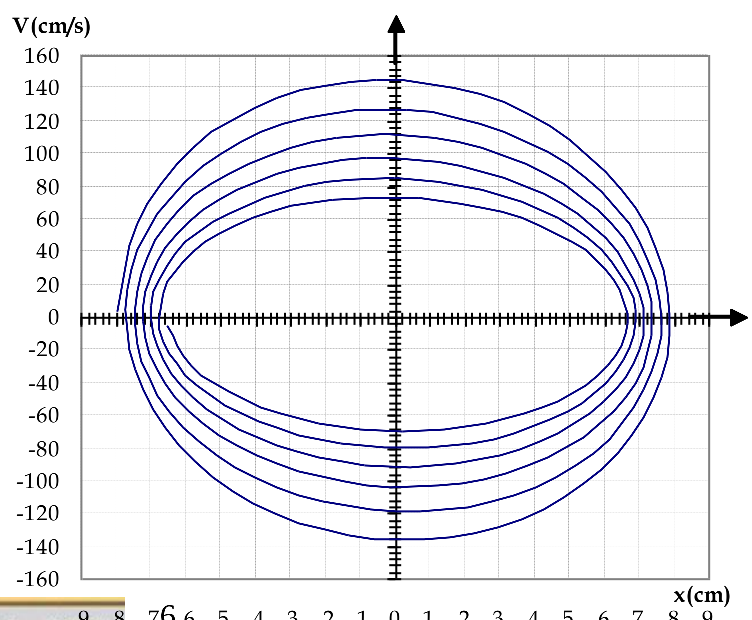
Le support MN n'est plus lisse et le frottement n'est plus négligeable. Le solide (s) effectue alors un mouvement pseudo-périodique de pseudo-période T.

Un dispositif approprié permet d'enregistré l'évolution de la vitesse V de (s) en fonction de sa position x sur l'axe x'Ox comme il est indiqué sur la figure(2).

a) A partir de l'enregistrement compléter le tableau ci-dessous :

t	0	T/4	T/2	3T/4	T
x (cm)			7,8		
$\overline{V}$ (cm/s)		146			

b) Calculer l'énergie dissipée par l'oscillateur dans les intervalles de temps [0 ;T/4], [T/4 ;T/2], [T/2 ;3T/4] et [3T/4 ; T].
c) Les énergies calculées précédemment montrent que l'amortissement est faible. Justifier cette affirmation.
d) La pseudo-période T est l'une des valeurs suivantes : 0,3 s ; 0,31 s ; 0,33 s. Choisir, en

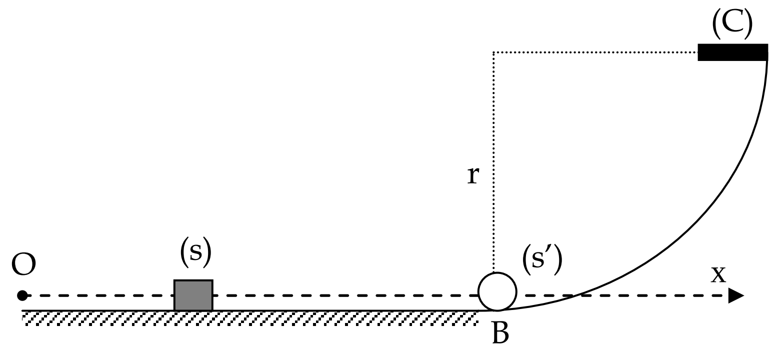


Figure(2)

justifiant, la pseudo-période convenable.

B – Choc élastique

Cet oscillateur, avec ces supports, est utilisable dans un jeu consiste à attaquer une cible (C) par un solide (s’) de masse m’ = 30 g initialement au repos au point B tell que OB = 20 cm comme il est indiqué sur la figure (3).

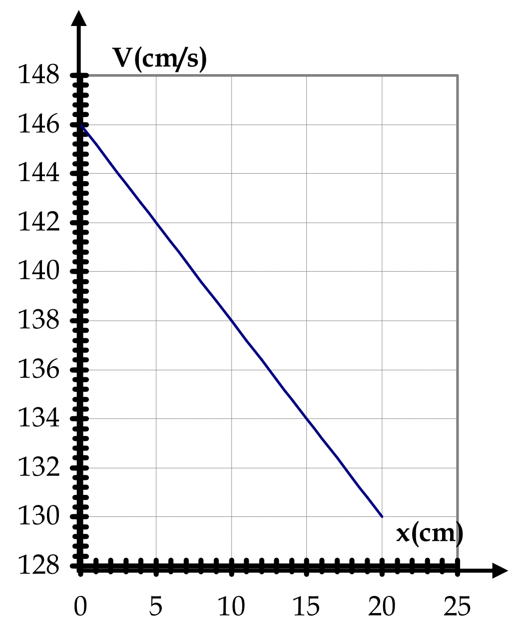


Figure(3)

La cible se trouve au sommet d’une piste circulaire très lisse, de rayon r = 20 cm, située dans le plan vertical passant par MN.

Le solide (s’) se trouve sur la trajectoire de (s). Un dispositif approprié permet de libérer (s), du ressort, lors de son passage pour la première fois par O (c.à.d à la date T/4).

La figure(4) représente l’enregistrement de la vitesse V de (s), en fonction de x, lorsqu’il est libéré du ressort.



a) Donner l’expression de la vitesse V en fonction de x.

b) En appliquant, sur (s), la deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$, déterminer l’expression de la force de frottement en fonction de la vitesse V.

c) Quelle est la vitesse de (s) juste avant le choc avec (s’) ?

d) Le choc entre (s) et (s’) est parfaitement élastique. Calculer la vitesse de (s’) juste après le choc.

e) (s) peut-il atteindre la cible (négliger le frottement sur la piste) ?

VI – Un solide (A) de masse m = 200 g se trouve au repos à une hauteur h = 60 cm au-dessus du sol, un ressort (R), à spires non jointives et de raideur k, disposé verticalement selon un axe Oz comme l'indique la figure 1.

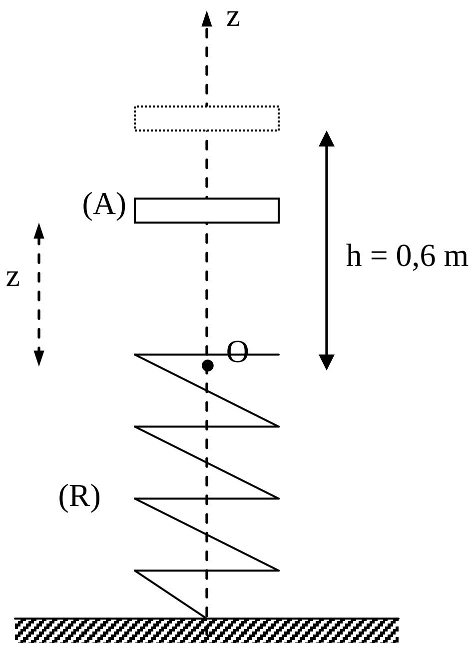


Figure 1

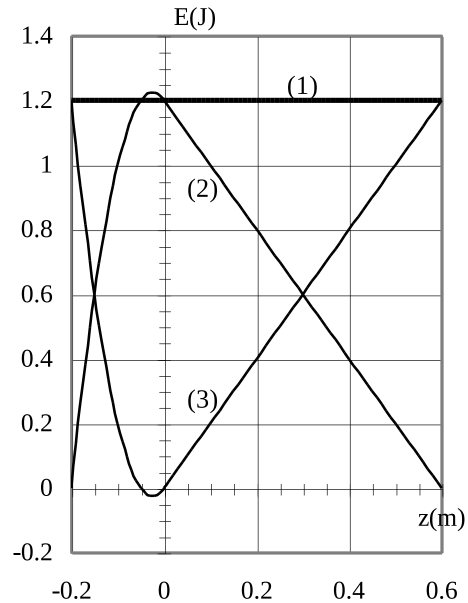


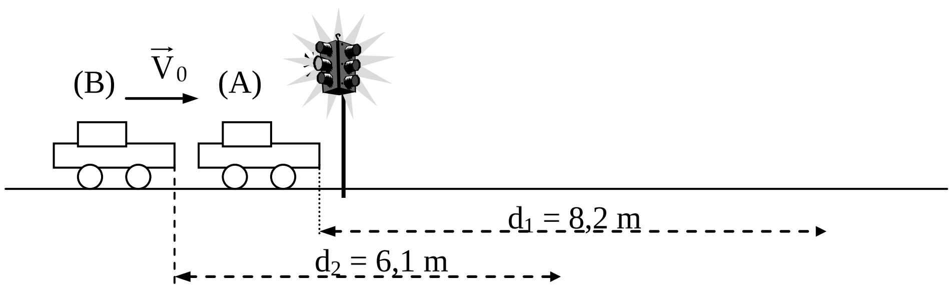
Figure 2

On lâche, sans vitesse, le solide (A). On désigne par z le côte de (A) à une date quelconque.
Le niveau de l'énergie potentielle de pesanteur est le plan horizontal passant par l'origine O. On néglige les frottements et la résistance de l'air. $g = 10\ m/s^2$.

1) Calculer l'énergie mécanique du système [(A) ; (R) ; Terre].
2) Déduire la vitesse de (A) juste avant son contact avec le ressort.
3) Dans la figure 2 on représente les énergies : cinétique, potentielle et mécanique du système [(A) ; (R) ; Terre] durant la descente de (A).
   a) Donner, en fonction de k et z, les expressions de l'énergie potentielle du système (on considère deux cas : $z > 0$ (avant la compression du ressort) et $z < 0$ (après la compression du ressort).
   b) Identifier, en justifiant, la nature de l'énergie représentée par chaque graphique de la figure 2.
   c) En utilisant la figure 2, déterminer la compression maximale du ressort.
   d) Calculer la valeur de k.
   e) Le graphique de l'énergie cinétique montre que la vitesse de (A) commence à décélérer à partir d'une position de côte z_0 de (A).
   i. Indiquer la valeur de z_0.
   ii. Faire, sur une figure, le bilan des forces agissantes sur (A) pour $z < 0$.
   iii. Montrer que z_0 est la position d'équilibre stable de (A) sur le ressort.

VII - Les traces des freins d'une voiture

Sur une route horizontale, une voiture A, de masse m = 1100 kg, est au repos sur le feu rouge. Une autre voiture B, de masse M = 1400 kg, se déplace à la vitesse $\vec{V}_0$, entre en collision avec la voiture A.
Juste après le choc, freins serrés, les traces du freinage sont respectivement d_1 = 8,2 m et d_2 = 6,1 m pour les voitures A et B comme l'indique la figure ci-dessous.



Le coefficient de frottement cinétique pour chaque voiture est μ = 0,13. Ce coefficient est défini comme le rapport de la force de frottement f sur la réaction normale N de la route $\mu = \frac{f}{N}$. Prendre g = 9,8 m/s^2.
Le niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur est le plan horizontal passant par les centres d'inerties des voitures.

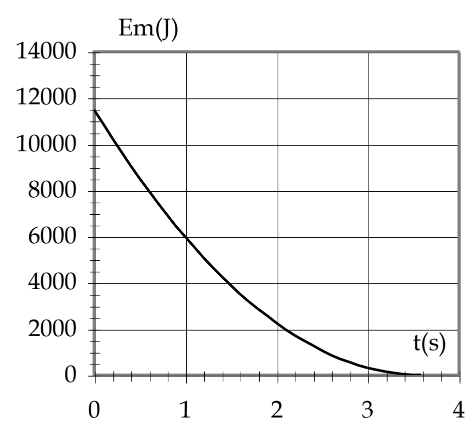
1) Vérifier que les forces de frottement, dues aux freinages, sont respectivement f_1 = 1401,4 N et f_2 = 1783,8 N pour les voitures A et B.

2) **a)** Après la collision l'énergie mécanique du système [voiture ; support ; Terre] est-elle conservée ? Justifier.
b) Calculer les travaux des forces de frottements pour chaque voiture. En déduire les vitesses de chaque voiture juste après la collision.

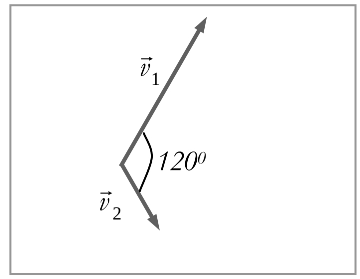
3) Que vaut alors la valeur de la vitesse $\vec{V}_0$?

4) En appliquant, après la collision, la deuxième loi de Newton, $\sum \vec{F}_{ex} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$, sur la voiture A. calculer la durée du freinage.

5) Dans le graphique de la figure ci-contre, on donne le graphique représentative de l'énergie mécanique du système [voiture A ; support ; Terre].
Vérifier, à partir du graphique la valeur trouvée dans **2) b)** de la vitesse de A juste après la collision et la durée du freinage de la voiture A.



VIII – Deux billes ponctuelles (b_1) et (b_2) de masses respectives m_1 = 0,5kg et m_2 = 2,5 kg se déplacent avec des vitesses et de modules respectives 10 m/s et 2 m/s. On désigne par (S) le système deux billes.



i) Calculer les modules des quantités de mouvement de (b_1) et (b_2).

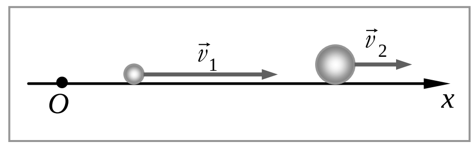
ii) On considère le cas $\mathbf{v_2},\mathbf{v_1} = 120^0$.

1- Faire une figure en construisant la quantité du mouvement resultante de (S).

2- Calculer les modules de $\vec{P}$, de la vitesse $\vec{v}_G$ du centre de masse de (S) et la valeur de l'angle $\alpha = \vec{v}_1, \vec{v}_G$.

iii) Prenons le cas où $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ se dirigent dans le sens positif d'un axe $\overrightarrow{Ox}$.

1- Donner les valeurs algébriques des vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.



2- (b_1) et (b_2) entrent en choc parfaitement élastique et colinéaire.
Calculer les vitesses de (b_1) et (b_2) juste avant le choc.

3- Déterminer le vecteur $\Delta\vec{P}_1$ qui représente la variation de la quantité de mouvement de (b_1).

4- Sachant que (b_1) est soumis à la force $\vec{F} = \dfrac{\Delta\vec{P}_1}{\Delta t}$ pendant le choc.
Le choc entre (b_1) et (b_2) dure 0,1s. Déterminer la force appliquée à (b_1) lors du choc.*

5- Donner alors une explication montrant la cause du changement de la vitesse de (b_1) lors du choc. Conclure la *deuxième loi de Newton*.*

IX – L'équation différentielle d'un oscillateur de masse m = 10 g, en oscillations rectilignes, est :

$\ddot{x} + 4\pi^2 x = 0$ (x en m et t en s)

a) Quelle est la nature des oscillations de l'oscillateur ? donner sa période T.

b) Aux dates $\dfrac{T}{2}$ et $\dfrac{T}{4}$ le mobile se déplace dans le sens négatif et ses énergies cinétiques sont respectivement 0,1 J et 0,2 J. Ecrire l'expression de l'équation horaire des oscillations.

c) Calculer la valeur de l'énergie mécanique de l'oscillateur. On considère l'énergie potentielle de l'oscillateur nulle quand x = 0.

X – Deux billes ponctuelles (a) et (b), de masses respectives m = 200 g et M = 800 g, se déplacent l'une contre l'autre sur un axe horizontal x'Ox de vecteur unitaire $\vec{i}$. La vitesse de (a) est $\vec{v} = 6.\vec{i}\ [\mathbf{m.s^{-1}}]$ et celle de (b) est $\vec{V}$.

(a) et (b) entre en choc parfaitement élastique et colinéaire.

a) Calculer , en fonction de la valeur algébrique $\overline{V}$ du vecteur $\vec{V}$, $\vec{v}'$ et $\vec{V}'$ de (a) et (b) respectivement après le choc.
b) Déduire les valeurs de V pour que (b) rebondit sur (a).
c) Si V = 3 $m.s^{-1}$ et la durée du choc est 0,1 s. Déterminer la force supposée constante qui a changé le sens de déplacement de (b).

XI – Une petite bille de masse m = 3,54 g, se déplace horizontalement, pénètre dans un premier masse m' = 1,22 kg et s'émerge de lui, pour s'inscrire dans une seconde masse m'' = 1,78 kg. Les deux masses sont initialement au repos comme l'indique la figure (1).
Après la collision, la vitesse de m' est v' = 0,63 $m.s^{-1}$ et celle de l'ensemble (m' – bille) est v'' = 1,48 $m.s^{-1}$ comme l'indique la figure (2). On néglige la masse perdue par m'.

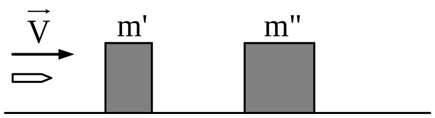


Fig.(1)

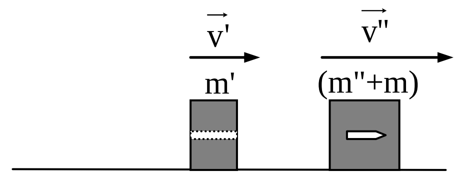


Fig.(2)

a) Calculer la vitesse V' de la bille juste après sa sortie de m'.
b) Calculer la vitesse initiale V de la bille.

XII – Un solide (S) de masse m = 600 g, peut se déplacer sans frottement sur une table horizontale. Le solide (S) est lié à deux ressorts (r) et (r'), sans masses, de même axe x'x, de même longueur à vide ℓ_0 = 20 cm et de raideurs respectives k = 8 $N.m^{-1}$ et k' = 12 $N.m^{-1}$ comme l'indique la figure ci-dessous.

A l'équilibre, la position du centre d'inertie G de (S) se confond avec le centre O de l'axe x'x. On prend AB = 50 cm et l'énergie potentielle de pesanteur est nulle en O.

a) Déterminer, à l'équilibre, les allongements $\Delta\ell_0$ et $\Delta\ell'_0$ respectives de (r) et (r').
b) Déterminer l'énergie potentielle du système (Terre – (S) – ressorts – support).
c) On déplace (S) suivant x'x de telle manière que G sera au point d'abscisse $x_0 = -4$ **cm** et on le relâche sans vitesse à la date t = 0.
   1. Construire les schémas du dispositif à un instant t = 0 et à un instant ultérieur t > 0 où G est au point d'abscisse x.
   2. Déterminer, à l'instant t et en fonction de x, m, k, k' et la vitesse v de (S), l'expression de l'énergie mécanique du système.
   3. Quelle est la valeur de cette énergie ?
   4. Déterminer l'équation différentielle du mouvement de (S) et montrer que sa fréquence peut s'écrire comme :

$$\nu = \sqrt{f^2 + f'^2}$$

   où f et f ' sont deux constantes à déterminer leurs expressions.

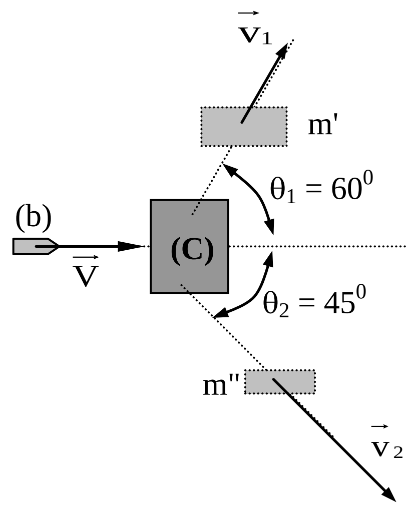
5. Ecrire la solution de l'équation différentielle.
6. Déduire la vitesse de (S) à l'instant t = 2 s.

d) Quelle est la valeur de l'énergie fournit par l'opérateur qui permet de mettre (S) en oscillations dans les conditions de la partie c) ?

XIII – Un corps (C) de masses M = 2 kg, initialement au repos, est le but d'un obus (b) de masse m = 200 g.

(b) se déplace à la vitesse $V = 150\,m.s^{-1}$ et entre en collision avec (C), ce dernier se divise en deux parties m' et m'' telles que m' = 3m''.

La direction de mouvement de (b) après le choc est invariable mais sa vitesse devient $V = 120\,m.s^{-1}$.



a) Calculer la vitesse v du centre d'inertie du système (m' – m'') après le choc.

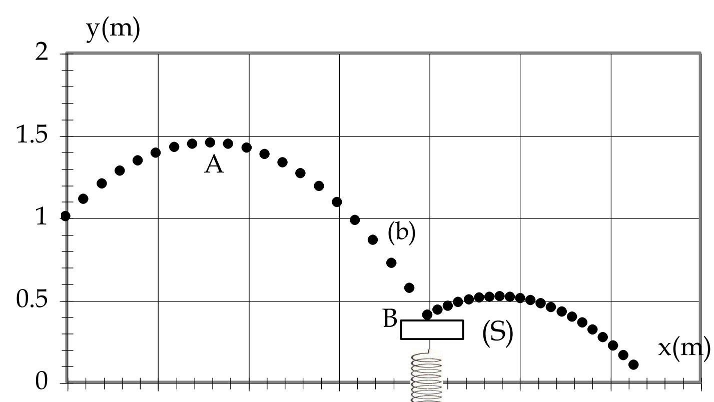
b) Calculer les vitesses v' et v'' de m' et m'' respectivement.

XIV - Lance d'une balle vers une cible

Une balle de masse m = 50 g, lancée avec une vitesse $\vec{\upsilon}_0$ faisant un angle avec, d'une hauteur 1 m au-dessus du sol, vers un solide (S) de masse M = 200 g à 2 m du point de lancement. (S) monte un ressort (R) de raideur k = 60 N/m.

Un dispositif approprié, enregistre le mouvement de la balle à partir du date de lancement, pris comme origine des dates, chaque intervalle de temps τ = 38 ms. On désigne par $\vec{\upsilon}$ la vitesse de la balle à une date t.

Le niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur est le plan horizontal y = 0. On néglige la résistance de l'air. g = 10 m/s^2.



I – Avant le rebond de la balle sur (S)

1) M_i étant la position de la balle à une date t_i et x_i sont abscisse. Compléter le tableau ci-dessous :

t_i(s)	τ	4τ	8τ	20τ
x_i(m)				

2) En appliquant la deuxième loi de Newton $\sum \vec{F}_{ex} = m.\vec{a}$, montrer que les composantes horizontale υ_x et verticale υ_y du vecteur vitesse $\vec{\upsilon}$ de la balle sont :

- $\upsilon_x = b_1$;
- $\upsilon_y = - 10t + b_2$; où b_1 et b_2 sont des constantes.

3) Vérifier que : $\upsilon_x = 2{,}63$ m/s.

4) Quelle particularité présente la direction du vecteur vitesse $\vec{\upsilon}$ au sommet A de la trajectoire ? Déduire la valeur de b.

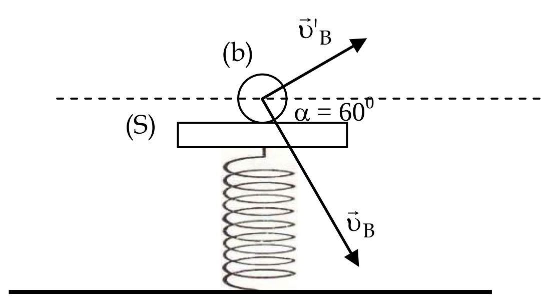
5) Vérifier que la valeur de la vitesse $\vec{\upsilon}_B$ de la balle juste avant le choc avec (S) est $\upsilon_B = 5{,}264$ m/s et que l'angle que forme $\vec{\upsilon}_B$ avec l'horizontale est $\alpha \cong 60^0$.

II – Après le rebond de la balle sur (S)

La vitesse de la balle juste après sont rebond sur (S) est $\vec{\upsilon}'_B$, perpendiculaire à $\vec{\upsilon}_B$.

Les graphiques dans la figure ci-contre sont les courbes représentatives, en fonction du temps, des énergies : mécanique, cinétique et potentielle du système [(b) ; Terre].

La nouvelle origine des dates est pris quand (b) rebondit sur (S).



1) Faire correspondre, en justifiant, à chaque énergie sa courbe représentative.

2) Vérifier que : $\upsilon'_B = 2{,}630$ m/s

3) Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}$ de (S) juste après le choc.

4) Le choc est-il élastique ? Justifier.

5) Calculer la compression maximale du ressor