I- (4 points)

Le RENT A VEHICLE est une magasine qui a deux types de véhicules américaines et Allemagnes. Ces deux types sont voitures et jeeps. 60% des véhicules sont de voitures; parmi ceux qui sont voitures, 70% sont Allemagnes et parmi ceux qui sont jeeps, 80% sont Allemagnes.

Partie A

Un véhicule est choisi au hasard dans cette magasine.

1) Calculer la probabilité que le véhicule choisi est une voiture américaine.
2) Calculer la probabilité que le véhicule choisi est une voiture, sachant qu'elle est américaine.

Partie B

Une personne énonce que la magasine a 50 véhicules. Maher veut louer deux véhicules simultanément et au hasard de cette magasine.

On considère les événements suivants :

V_1: " Les véhicules choisis sont une voiture et un jeep ".

V_2: " Les véhicules choisis sont deux voitures ".

A: " Les véhicules choisis sont américaines ".

1) Calculer les probabilités suivantes : $P(A / V_2)$ et $P(V_2 \cap A)$.
2) Soit X la variable aléatoire qui désigne les nombres de voiture louée par Maher.
   - **a-** Montrer que $P(X = 1) = \dfrac{24}{49}$.
   - **b-** Trouver la loi de probabilité de X.

II- (4 points)

L'espace est rapport à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A (1 ; 1 ; 1), B(2 ; 0 ; – 2) et C(3 ; 2 ; 1). (D) est la droite d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+3 \\ z = 3t+2 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

1) Calculer l'aire du triangle ABC.
2) Vérifier qu'une équation du plan (Q) déterminé par les trios points A, B et C est $x - 2y + z = 0$.
3) Ecrire une équation du plan (R) déterminé par le point A et la droite (D).
4) Trouver un système d'équations paramétriques de la droite (L), l'intersection de deux plans (Q) et (R). Vérifier que (Q) et (R) sont perpendiculaire.
5) Calculer la distance de point E(1 ; 0 ; 4) au plan (Q) et celle de point E au plan (R), puis déduire la distance de E à la droite (L).

III- (4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, E, M et M′ d'affixes respectives i, –i, 2 + i, z et z′ tel que $z' = \dfrac{z-i}{z+i}$ $(z \neq -i)$.

1) Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.
   - **a-** Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
   - **b-** Trouver l'ensemble des points M sachant que M′ décrit la droite d'équation $y' = x'$.
2) Dans cette partie, on suppose que M′ décrit le cercle de centre O et rayon 1.
   - **a-** Trouver l'ensemble (L) des points M.
   - **b-** Vérifier que F, le milieu de [BE], appartient à (L).
3) Calculer $\dfrac{z_E - z_A}{z_B - z_A}$, puis déduire la nature du triangle ABE.

IV- (8 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle (E): $xy' - y = x - 1$. Soit $y = xz$.

1) Former l'équation différentielle (F) en z, puis la résoudre.
2) En déduire la solution générale de (E) et la solution particulière dont la courbe représentative (C), dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, passe par le point A(1 , 0).

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0 , +\infty[$ par : $f(x) = x\ln x - x + 1$. On design par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique: 2 cm).

1)
   - **a-** Etudier les variations de f et dresser le tableau de variations de f.
   - **b-** En déduire le signe de f(x).
2) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique α. Verifier que $3{,}5 < \alpha < 3{,}6$.
3) (d) est la droite d'équation $y = -x + 1$. Etudier les positions relatives de (d) et (C).
4) Tracer (C).
5) Soit (D) la domaine limitée par la courbe (C), la droite (d), et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.
   - **a-** Calculer, en fonction de α, l'aire $A(\alpha)$ de (D).
   - **b-** Montrer que $A(\alpha) = (\alpha + 1)^2\ \text{cm}^2$.
6) Soit F la fonction définie sur $]1 , +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$. Sans trouver la forme explicite de F(x), montrer que F admet une fonction réciproque.

Barèmes

<table>
<tr><th colspan="3">Question I</th><th>Note</th></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Partie A</u></td></tr>
<tr><td>1)</td><td colspan="2">$P(A \cap V) = \frac{30}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{9}{50}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>2)</td><td colspan="2">$P(V / A) = \frac{P(A \cap V)}{P(A)} = \frac{0{,}18}{P(A \cap V) + P(A \cap \overline{V})} = \frac{0{,}18}{0{,}18 + 0{,}8} = \frac{9}{13}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Partie B</u></td></tr>
<tr><td>1)</td><td colspan="2">$P(A / V_2) = \frac{C_9^2}{C_{30}^2} = \frac{12}{145}$
$P(V_2 \cap A) = \frac{36}{1225}$
<table><tr><td></td><td>A</td><td>All</td><td></td></tr><tr><td>V</td><td>9</td><td>21</td><td>30</td></tr><tr><td>J</td><td>4</td><td>16</td><td>20</td></tr><tr><td></td><td>13</td><td>37</td><td>50</td></tr></table></td><td>0,5
0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2)</td><td>a-</td><td>$P(X = 1) = \frac{C_{30}^1 \times C_{20}^1}{C_{50}^2} = \frac{24}{49}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>b-</td><td>$X_\Omega = \{0 , 1 , 2\}$
$P(X = 0) = \frac{C_{20}^2}{C_{50}^2} = \frac{38}{245}$; $P(X = 2) = \frac{C_{30}^2}{C_{50}^2} = \frac{87}{245}$</td><td>0,5
0,5
0,5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Question II</th><th>Note</th></tr>
<tr><td>1)</td><td>$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$; Aire = $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ unités d'aire</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td>2)</td><td>(Q): $\overrightarrow{AM} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$; $x - 2y + z = 0$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>3)</td><td>(R): $4x + y - 2z - 3 = 0$</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td>4)</td><td>(L): $\begin{cases} x = \frac{1}{3}m + \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3}m + \frac{1}{3} \\ z = m \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$. $\overrightarrow{N}_Q \cdot \overrightarrow{N}_R = 4 - 2 - 2 = 0$; (Q) et (R) sont perpendiculaires</td><td>0,75
0,25</td></tr>
<tr><td>5)</td><td>$d(E , (Q)) = \frac{5\sqrt{6}}{6}$ u et $d(E , (R)) = \frac{\sqrt{21}}{3}$ u
$d(E , (L)) = \sqrt{\left(d(E,(Q))\right)^2 + \left(d(E,(R))\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$ u</td><td>0,25
0,25
0,5</td></tr>
</table>

Question III			Note
1)	a-	$x' = \dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}$ et $y' = \dfrac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$	1
	b-	$y' = x'$; alors $x^2 + y^2 - 1 = -2x$ et $x^2 + (y+1)^2 \neq 0$; alors $(x+1)^2 + y^2 = 2$; M décrit le cercle de centre $(-1 , 0)$ et rayon $\sqrt{2}$ déprivé du point B	1
2)	a-	$OM' = 1$; $MA = MB'$; M varie sur la médiatrice de [AB]	0,75
	b-	$F(1 , 0)$; $FA = FB = \sqrt{2}$; F appartient à (L)	0,5
3)		$\dfrac{z_E - z_A}{z_B - z_A} = i$; $\dfrac{AE}{AB} = 1$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}) = \dfrac{\pi}{2}$; ABE est rectangle isocèle	0,75

Question IV			Note
Partie A			
1)		(F): $z' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$. $z = \ln\lvert x \rvert + \dfrac{1}{x} + C$	0,5 0,5
2)		S.G.: $y = x\ln\lvert x \rvert + 1 + Cx$; $y = x\ln\lvert x \rvert - x + 1$	0,25 0,5
Partie B			
1)	a-	$\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & 1 & \searrow & 0 & \nearrow & +\infty \end{array}$	1
	b-	$f(x) \geq 0$ car le minimum est zéro	0,25
2)		Sur $]1 , +\infty[$: f est continue, f est strictement croissante, $2 \in]0 , +\infty[$; alors l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique α. Mais $f(3,5) = 1,8 < 2$ et $f(3,6) = 2,01 > 2$, alors $3,5 < \alpha < 3,6$	1
3)		$f(x) - y_d = x\ln x$: si $x \in]0 , 1[$,alors (C) est au dessous de (d); si $x = 1$, alors (C) coupe (d); si $x \in]1 , +\infty[$, alors (C) est au dessus de (d)	0,5
4)		Courbe	1
5)	a-	$A(\alpha) = \left(\dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{1}{4}\right)$ unités d'aire.	1
	b-	$f(\alpha) = 2$; $A(\alpha) = \left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{1}{4}\right) \times 4cm^2 = (\alpha + 1)^2 cm^2$	1
6)		Sur $]1 , +\infty[$: $F'(x) = f(x) > 0$. Sur $]1 , +\infty[$: F est continue et strictement croissante, alors elle admet une fonction réciproque	0,5