I- (4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, D, M et M′ d'affixes respectives : –3, –1 + i, –4 + 2i, z et z′ tel que $z' = \dfrac{z+1-i}{z+3}$ $(z \neq -3)$.

1) Ecrire z′ sous la forme exponentielle si z = –1 + 2i.

2)

a- Donne l'interprétation géométrique de | z′ |, et déduire l'ensemble des points (L) de M si | z′ | = 1.

b- Vérifier que I, le milieu de [BD], appartient à (L).

3)

a- Prouver que | z′ – 1 | × | z + 3 | est une constante à déterminer.

b- On donne E un point d'affixe 1 et (C) le cercle de centre E et de rayon égal à $\sqrt{5}$. Montrer que si M′ varie sur (C), alors M varie sur un cercle dont on déterminera son centre et son rayon.

4)

a- Montrer que $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur.

b- Déduire la nature du triangle ABD.

II- (4 points)

Dans l'espace rapportée à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le point A (2 ; 1 ; 5) et les deux droites (d) et (d') définies par : (d) $\begin{cases} x = 2m+4 \\ y = 2m+1 \\ z = -3m-5 \end{cases}$ et (d′) $\begin{cases} x = t+2 \\ y = 2t-1 \\ z = -2t+6 \end{cases}$, où m et t sont deux paramètres réels.

1) Montrer que (d) et (d′) sont non coplanaires.

2) Montrer que le plan (P) déterminé par A et (d′) a pour équation cartésien : ax + y + cz – 15 = 0, où a et c sont deux réels à déterminer.

3) Soit M est un point variable sur (d).

a- Calculer la distance du point M à (P), et déduire la position relative de (d) et (P).

b- (d) et A détermine un plane (Q). Sans calculer l'équation de (Q), déterminer les équations paramétriques de la droite d'intersection (D) de (P) et (Q).

c- Soit f(m) = AM^2. Calculer, en fonction de m, f(m) et déduire les coordonnées de la projection orthogonale de A à (d).

III- (4 points)

U_1 et U_2 sont deux urnes tels que:

U_1 contient 10 boules : 6 rouges et 4 jaunes.

U_2 contient 10 boules : 5 rouges, 4 blanches et 1 vert.

C est une pièce de monnaie, où la probabilité d'avoir une face est 3 fois que la probabilité d'avoir une pile.

On jette la pièce de monnaie C.

- Si on obtient une pile, on tire **simultanément** par hasard deux boules de l'urne U_1
- Si on obtient une face, on tire deux boules par hasard **successivement avec remise** de l'urne U_2**.**

On Considère les événements suivants :

U_1 : "L'urne choisie est U_1."

U_2 : "L'urne choisie est U_2."

R : "Les boules tirées sont rouge "

1) Démontrer que $P(U_2) = \frac{3}{4}$ et que $P(U_1) = \frac{1}{4}$.

2) Calculer $P(R / U_1)$, $P(R \cap U_1)$ et $P(R \cap U_2)$. Déduire que $P(R) = \frac{13}{48}$.

3) Les deux boules choisies sont rouges. Calculer la probabilité d'avoir deux boules de l'urne U_1.

4) Soit X la variable aléatoire désigne le nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X.

IV- (8 points)

Partie A

On considère l'équation différentiel (E) : $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$. On pose $y = z - x^2e^x - 2xe^x$.

1) Former l'équation différentielle satisfaite par z, et résoudre cette équation.

2) Déduire la solution générale de (E), et la solution particulière sachant que la courbe (C) admet une tangente parallèle à l'axe $x'ox$ au point A (0 ; 2).

Partie B

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = (-x^2 - 2x + 2)e^x$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. *(Unité graphique : 2 cm)*

1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Prouver que $f'(x) = -x(x+4)e^x$, et dresser le tableau de variations de f.

3) Prouver que l'équation f(x) = 0 admet deux racines α et β. Vérifier que $-2{,}8 < \alpha < -2{,}7$ et que $0{,}7 < \beta < 0{,}8$.

4) Vérifier que $f''(x) = -(x^2 + 6x + 4)e^x$. Vérifier que (C) admet deux points d'inflexion dont-on déterminera ses coordonnées.

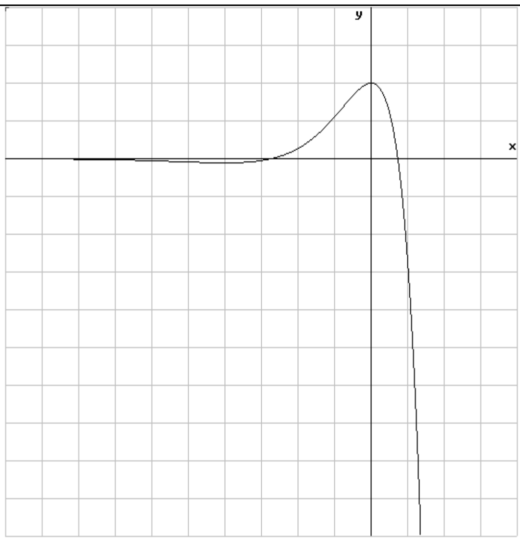
5) Calculer l'aire du domaine limitée par (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation : $x = -1$.

Barèmes

Question I		Note
1)	$z = \frac{\sqrt{2}}{8} e^{\frac{\pi}{4}i}$	**0,5**
2)	**a-** • $\lvert z' \rvert = \frac{BM}{AM}$ ou $\lvert z' \rvert = OM'$ • (L) est la médiatrice de [AB]	**0,25** **0,75**
	b- $z_I = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$; $\left\lvert \frac{z_I + 1 - i}{z_I + 3} \right\rvert = 1$, alors I ∈ (L)	**0,5**
3)	**a-** $\lvert z' - 1 \rvert \times \lvert z + 3 \rvert = \lvert -2 - i \rvert = \sqrt{5}$	**0,5**
	b- $EM' \times AM = \sqrt{5}$; AM = 1; M décrit le cercle de centre A et de rayon 1	**0,75**
4)	**a-** $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = i$; alors $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur	**0,25**
	b- ABD isocèles (AD = AB) et rectangle en A	**0,5**

Question II		Note
1)	$\overrightarrow{BC}.\left(\vec{u}_d \wedge \vec{u}_{d'}\right) = 16 \neq 0$; alors (d) et (d') sont non coplanaires	**1**
2)	(P): $2x + y + 2z - 15 = 0$	**0,5**
3)	**a-** • $d(M, (P)) = \frac{15}{3}u$ • (d) / / (P)	**0,5** **0,5**
	b- (L): $\begin{cases} x = 2k + 2 \\ y = 2k + 1 \quad \text{(k est un réel)} \\ z = -3k + 5 \end{cases}$	**0,5**
	c- • $f(m) = AM^2 = 17m^2 + 68m + 104$ • (0 , –3 , 1)	**0,5** **0,5**

Question III		Note
1)	$P(U_1) + P(U_2) = 1$ et $P(U_2) = 3P(U_1)$; alors $P(U_2) = \frac{3}{4}$ et $P(U_1) = \frac{1}{4}$	**0,5**
2)	$P(R / U_1) = \frac{1}{3}$; $P(R \cap U_1) = \frac{1}{12}$; $P(R \cap U_2) = \frac{3}{16}$; $P(R) = \frac{13}{48}$	**0,25** **0,5** **0,5** **0,5**
3)	$P(U_1 / R) = \frac{4}{13}$	**0,5**
4)	$X_\Omega = \{0 , 1 , 2\}$; $P(X = 0) = \frac{53}{240}$; $P(X = 1) = \frac{61}{120}$; $P(X = 2) = \frac{13}{48}$	**0,25** **0,5** **0,5**

<table>
<tr><th colspan="3">Question IV</th><th>Note</th></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Partie A</u></td></tr>
<tr><td>1)</td><td colspan="2">• (F): $z'' - 3z' + 2z = 0$
• $z = C_1e^x + C_2e^{2x}$</td><td>0,75
0,5</td></tr>
<tr><td>2)</td><td colspan="2">• SG de (E) : $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - x^2e^x - 2xe^x$
• $y(0) = 2$, alors $C_1 + C_2 = 2$; $y'(0) = 0$, alors $C_1 + 2C_2 = 2$; $C_1 = 2$ et $C_2 = 0$; $y = \left(-x^2 - 2x + 2\right)e^x$</td><td>0,25
0,5</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Partie B</u></td></tr>
<tr><td>1)</td><td colspan="2">$0; -\infty$</td><td>0,25
0,25</td></tr>
<tr><td>2)</td><td>• $f'(x) = -x(x+4)e^x$</td><td><table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-4</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f '(x)</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>0</td><td>↘</td><td>$-6e^{-4}$</td><td>↗</td><td>2</td><td>↘</td><td>$-\infty$</td></tr>
</table></td><td>0,5
1</td></tr>
<tr><td>3)</td><td colspan="2">Sur $]-4\ ,\ 0[$: f est continue et strictement croissante de $-0,11$ à $+2$, alors $f(x) = 0$ admet une solution unique α. Mais $f(-2,8) \times f(-2,7) < 0$, alors $-2,8 < \alpha < -2,7$.
Même pour $0,7 < \beta < 0,8$</td><td>0,5
0,5</td></tr>
<tr><td>4)</td><td colspan="2">Pour x = -5,2: f "(x) = 0 et f "(x) change de signe (- de +), alors $I_1(-5,2\ ,\ -0,1)$
Pour x = -0,8: f "(x) = 0 et f "(x) change de signe (+ to -), alors $I_2(-0,8\ ,\ 1,3)$</td><td>0,5
0,5</td></tr>
<tr><td>5)</td><td>
</td><td>6) Aire = $\int_{-1}^{0} f(x)ds = 2 - e^{-1} = 1,63\ u^2$</td><td>1

1</td></tr>
</table>