Classe : S.V Matière : Math	Année scolaire : 2010-2011

Exercice I (4points)

Choisir la bonne réponse:

1) Si $z = \sqrt{3} + i$, alors z^{12} est :

a. $\boxed{2^{12}}$ b. $\boxed{2^{12}\ i}$ c. $\boxed{-2^{12}}$

2) Si $(z - 1)(\bar{z} - i)$ est réel , alors l'ensemble des points M(z) est :

a. $\boxed{\text{un cercle}}$ b. $\boxed{\text{une droite}}$ c. $\boxed{\text{demi droite}}$

3) Dans l'équation $z + i\bar{z} = (1 + i)$, le nombre z est égal à:

a. $\boxed{2 + i}$ b. $\boxed{2 - i}$ c. $\boxed{-2 + i}$.

4) Si $z = \dfrac{3+4i}{1-2i\sqrt{6}}$, alors $\left|z^{10}\right| + \left|\bar{z}^{10}\right|$ est égal à:

a. $\boxed{1}$ b. $\boxed{2}$ c. $\boxed{2^{10}}$

Exercice II (4points)

On considère les nombres complexes $a=\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $b=\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^5$, $c=\dfrac{6}{3+i\sqrt{3}}$.

1) Mettre a, b et c sous forme exponentielle, puis mettre b et c sous forme algébrique.

2) Placer dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points A, B, C d'affixes respectives a, b, c.

3) Soit I le point d'affixe 1.

a- Montrer que les points A, B, C sont sur un cercle de centre I dont on précisera le rayon.

b- Montrer que le triangle OAC est équilatéral.

Exercice III(4points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

1) Montrer que le domaine de définition de f est $]0; +\infty[$.

2) Calculer les limites de f en 0^+ et $+\infty$. Déduire une asymptote à (C_f).

3) Montrer que f(x)s'écrit sous la forme $f(x) = x+\ln(1-e^{-x})$. déduire que la droite (d) d'équation :y=x est une asymptote oblique à (C_f).

4) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

5) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et tracer (C_f).

6) f admet une fonction réciproque sur]0; +∞[. Calculer $f^{-1}(x)$.

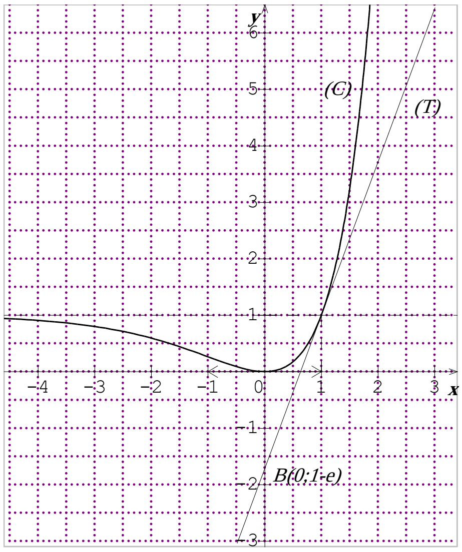
Exercice IV (8 points)

Partie A

La courbe (C) ci- dessous est la représentation graphique d'une fonction g définie sur IR par

$g(x) = (ax+b)e^{x}+c$, où a, b et c sont des réels.

La tangente en (1;1) à la courbe (C) passe par le point B(0;1-e).



1) Montrer que g admet sur]0;+∞[une fonction réciproque g^{-1}.

2) Déterminer le domaine de définition de g^{-1}.

3) Tracer la courbe représentative de g^{-1}.

4) Résoudre l'équation $g(x)= g^{-1}(x)$.

5) Calculer $(g^{-1})'(1)$.

6) A partir des renseignements portés sur la courbe de g

Démontrer que a=1 , b=-1 et c=1 .

Partie B

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = (x-2)e^{x}+x$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un Repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Étudier les limites de f en +∞ et -∞ .

2) Montrer que $f'(x) = g(x)$, étudier son signe à l'aide de la partie A, dresser le tableau de variation de f .

3) Montrer que $f(x)= 0$ a une solution unique α sur IR.

4) Montrer que $1,65<\alpha<1,7$.

5) Montrer que (C_f) admet la droite (Δ) d'équation y=x comme asymptote. Étudier la position de (C_f) par rapport à (Δ), préciser les coordonnées de leur point d'intersection A .

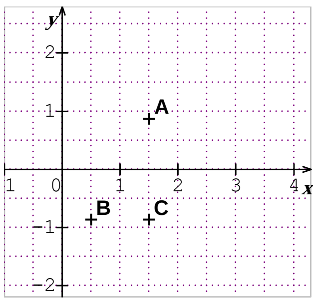
6) Montrer qu'il existe un point E de (C_f) où la tangente (D) à (C_f) est parallèle à (Δ).Calculer les coordonnées de E et donner une équation de (D) .

7) Tracer (Δ) , (D) et (C_f).

8) Montrer que la fonction F définie par $F(x)=(x-3)e^{x}+\dfrac{x^{2}}{2}$ est un primitive de f .

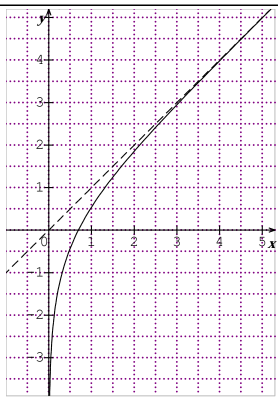
Classe : S.V	Année scolaire : 2010-2011
Matière : Math	Durée : 2h

Barème

№	Réponses	Note
I	1) $z^{12}=(2e^{\frac{i\pi}{6}})^{12}=2^{12}$ a 2) Z=x^2+y^2-x+y+i(-x+y+1) est réel ssi –x+y+1=0 b 3) z= 2-i b 4) $\lvert Z\rvert=\lvert\overline{Z}\rvert=1$ donc $\lvert Z^{10}\rvert+\lvert\overline{Z}^{10}\rvert=1+1=2$	4
II	1) a= $\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}$ b= $e^{\frac{i5\pi}{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ c= $\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$	11/2 1/2
	2) 3/4 	3/4
	3)a- $\lvert z_A-1\rvert=\lvert z_B-1\rvert=\lvert z_C-1\rvert=1$ donc A , B et C sur le cercle de centre I(1) et de rayon R= 1 . b- $\frac{z_A-z_o}{z_C-z_o}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc OAC équilatérale	1
III	1) f definie lorsque e^x-1>0 donc x>0 ce qui donne D_f=]0 ;+∞[	1/4
	2) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, x= 0 A.V et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	3/4
	3) x+ln(1-e^{-x}) = lne^x+ ln(1-e^{-x})=lne^x(1-e^{-x})=ln(e^x-1) = f(x) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(1-e^{-x})=\ln 1=0$, y = x est une asymptote O .	1/2
	4) $f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}>0$ donc f strictement croissante	1

x	0	+∞
f '(x)	‖	+
f(x)	‖	$-\infty$ ⟶ $+\infty$

5) f(x) = 0 donc e^x-1=1 ce qui donne x= ln2 — 1

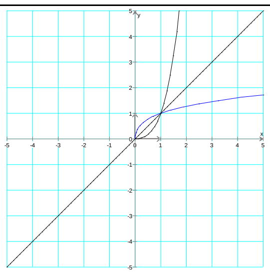


6) y =ln(e^x-1) ssi e^x-1=e^y ssi x=ln(e^y+1) donc

$f^{-1}(x)$ = ln(e^x+1) — 1/2

IV Partie A 1) g continue et strictement croissante sur]0 ; +∞ [donc g^{-1} exsite — 1/4

2) $D_{g^{-1}}$=]0 ; +∞ [— 1/4

3)  — 1/4

4) g(x) = g^{-1}(x) admet une seule solution x=1 — 1/4
x= 1 car le deux courbes ses coupent en un se
point d'abscisse 1

5) $(g^{-1})'(1) = \dfrac{1}{g'(x)}; g(x) = 1$ mais g(1)=1donc x=1 et g '(1) = pente(T)= e — 1/2

donc $(g^{-1})'(1) = \dfrac{1}{g'(1)} = \dfrac{1}{e}$

6) g(0) =0 donc b+c= 0 — 3/4

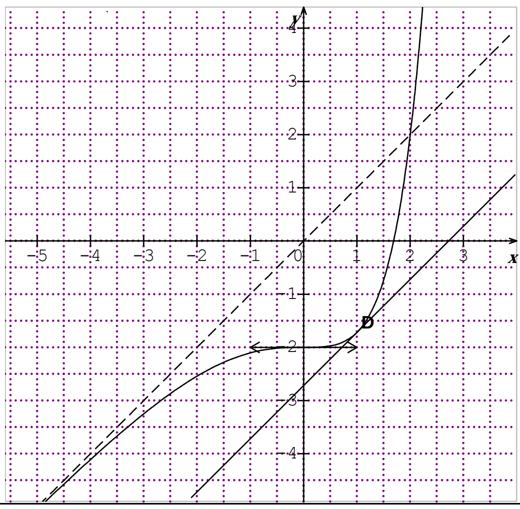
g(1)=1 donc (a+b)e+c =1 et g '(0)= 0 (min) donc b+a=0

ce qui donne a= 1 , b=-1 et c= 1 .

Partie B 1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ — 1/2

2) f '(x) = (x-1)e^x+1=g(x) ≥ 0 — 1

x	$-\infty$	0	$+\infty$

<table>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><td>f'(x)</td><td>+ 0 +</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>$-\infty$ → -2 → $+\infty$</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>3) f continue et strictement croissante de $-\infty$ de $+\infty$ donc f(x)= 0 ademt une
solution unique $\alpha \in IR$</td><td>1/2</td></tr>
<tr><td></td><td>4) f(1,65) = -0,172 et f(1,7) = 0,057 donc 1,65< α <1,7</td><td>1/2</td></tr>
<tr><td></td><td>5) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x-2)e^{x} = 0$ donc y= x A.O en $-\infty$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f(x)-x</td><td>- 0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>Positions</td><td>(Δ) au dessous (C)</td><td>(Δ) au dessus (C)</td><td></td></tr>
</table>
Le point d'intersection A(2,2)</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>6) Pente(D) = pente(Δ) =1 mais pente (D) = f '(x_E) = g(x_E) donc x_E=1 E(1 ; 1-e)</td><td>1/2</td></tr>
<tr><td></td><td>

7)</td><td>11/4</td></tr>
<tr><td>8</td><td>F'(x) = (x-2)e^{x}+x=f(x)</td><td>1/2</td></tr>
</table>