I- (4 points)

OABCDEFG est un cube d'arrêt 1. L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$.
a est un réel strictement positive. M, N et P sont trios points tells que M(a , 0 , 0), N(0 , a , 0) et P(1 , 1 , a).

1) Montrer que le plan (DMN) a une équation cartésien : $x + y + az = a$.

2)

- **a-** Montrer que $\overrightarrow{OP}$ est un vecteur normal du plan (DMN), puis donner une représentation paramétrique de la droite (OP).
- **b-** La droite (OP) coupe le plan (DMN) en H. Exprimer, en fonction de a, le nombre réel t tel que $\overrightarrow{OH} = t\overrightarrow{OP}$.

3)

- **a-** Calculer, en fonction de a, la distance de P au plan (DMN).
- **b-** Justifier que le triangle DMN est isocèle. Calculer, en fonction de a, l'aire du triangle DMN.
- **c-** En déduire le volume du tétraèdre PDMN.

II- (4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B, M et M′ d' affixes respectifs 2i, 1 + i, z et z′ tel que $z' = \dfrac{z-2i}{z}$ $(z \neq 0)$.

1) Soit (C) le cercle de centre O et rayon 1.

- **a-** Donner une interprétation géométrique de $|\ z'\ |$, puis déduire l'ensemble (L) des points M lorsque M′ décrit le cercle (C). Vérifier que B appartient à (L).
- **b-** Donner une interprétation géométrique de arg(z′), puis déduire l'ensemble des points M lorsque z′ est réel.

2) Soit $z = e^{\frac{\pi}{3}i}$. E et F sont deux points d'affixes z^n et z^{n+1} respectivement, où n est un entier naturel.

- **a-** Peut-on trouver les valeurs de n pour que z^n est imaginaire pur? Justifier votre réponse.
- **b-** Montrer que le triangle OEF est équilatéral.

III- (4 points)

Dans une classe de 30 élèves sont formes un club photo et un club théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Tl y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

1) On interroge un élève de la classe pris au hasard. On appelle P l'événement: " L'élève fait partie du club photo " et T l'événement : " L'élève fait partie du club théâtre ". P et T sont-elles indépendants? Justifier.

2) Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

- **a-** On appelle T_1 l'événement : " Le premier élève appartient au club théâtre ".
  Calculer $P(T_1)$.
- **b-** On appelle T_2 l'événement : " L'élève pris en photo appartient au club théâtre ".
  Calculer $P\left(T_2 / T_1\right)$, puis $P\left(T_2 / \overline{T_1}\right)$. En déduire $P\left(T_2 \cap T_1\right)$ et $P\left(T_2 \cap \overline{T_1}\right)$.
- **c-** Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théâtre est 0,2.

IV- (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \dfrac{e^x}{e^x + 1}$. (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) (D) et (L) sont les droites d'équations y = x and y = x – 1 respectivement. Montrer que (D) est une asymptote à (C) en $-\infty$ et que (L) est une asymptote à (C) au $+\infty$.

3) Soit $E\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$. Montrer que E est un centre de symétrie de (C).

4)

a- Calculer $f'(x)$ et déduire que $f'(x) > 0$.

b- Dresser le tableau de variations de f.

5)

a- Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point E.

b- Montrer que E appartient à (C) et (T), puis étudier les positions relatives de (C) et (T).

6) Montrer que E est un point d'inflexion de (C).

7) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α et vérifier que $0,6 < \alpha < 0,7$.

8) Tracer (T) et (C).

9) La fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}.

a- Tracer (C′), la courbe représentative de f^{-1} dans le même system précédant.

b- (T′) est la tangent à (C′) au point $E'\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$. Sans tracer (T′), montrer que (T) et (T′) ont un point commun dont on déterminera les coordonnées.

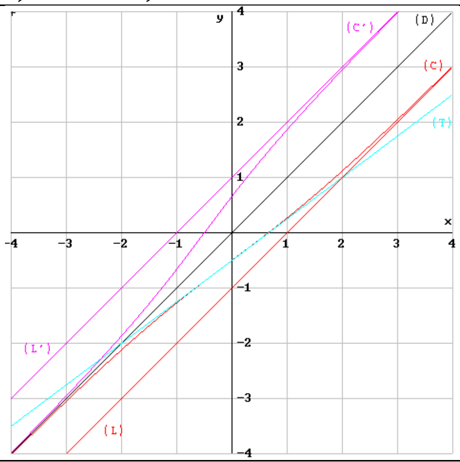
Barèmes

Question I			Note
1)	D(0 , 0 , 1); D, M et N appartiennent à x + y + az = a		**0,5**
2)	**a-**	$\overrightarrow{OP}(1,1,a) = \overrightarrow{N}(1,1,a)$	**0,5**
	b-	(OP): $\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = ak \end{cases}$; {H} = (OP) $\cap$ (DMN); $H\left(\frac{a}{2+a^2};\frac{a}{2+a^2};\frac{a^2}{2+a^2}\right)$; t = $\frac{a}{2+a^2}$	**1**
3)	**a-**	d(P , (DMN)) = $\frac{\lvert a^2-a+2\rvert}{\sqrt{2+a^2}} = \frac{a^2-a+2}{\sqrt{2+a^2}}$ u	**0,5**
	b-	DM = DN = $\sqrt{a^2+2}$, alors DMN isocèles. Aire = $\frac{a\sqrt{2+a^2}}{2}$ unités d'aire	**0,5** **0,5**
	c-	Volume = d(P, (DMN)) × Aire DMN = $\frac{a^3-a^2+2a}{2}$ unités de volume	**0,5**

Question II			Note
1)	**a-**	• $\lvert z' \rvert = \frac{AM}{OM}$. • OM′ = 1; $\lvert z' \rvert$ = 1; AM = OM; M décrit la médiatrice de [OA]. • $\left\lvert\frac{z_B-2i}{z_B}\right\rvert = \frac{\lvert 1-i\rvert}{\lvert 1+i\rvert}$ = 1; B $\in$ (L).	**0,25** **0,75** **0,5**
	b-	• arg(z′) = $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AM})$ (2π). • arg(z′) = $k\pi$; $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AM}) = k\pi$; O, A et M sont alignes; M décrit la droite (OA) deprivee de O	**0,25** **0,75**
2)	**a-**	$\arg(z^n) = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$; $\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \frac{(2k+1)\pi}{2}$; n = $\frac{6k+3}{2}$ n'est pas entier naturel; on ne peut pas trouver n	**0,5**
	b-	OE = $\lvert z^n \rvert$ = 1; OF = $\lvert z^{n+1} \rvert$ = 1; $(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}) = \arg\left(\frac{z^{n+1}}{z^n}\right) = \arg(z) = \frac{\pi}{3}$. OEF est équilatéral car il est isosceles avec un angle de 60°	**1**

Question III			Note
1)	$P(P \cap T) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$; $P(P) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$; $P(T) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$; $P(P) \times P(T) = P(P \cap T)$, alors P et T sont indépendants		**1**
2)	**a-**	$P(T_1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	**0,5**
	b-	$P(T_2 / T_1) = \frac{1}{9}$; $P(T_2 / \overline{T_1}) = \frac{2}{9}$; $P(T_2 \cap T_1) = \frac{1}{45}$; $P(T_2 \cap \overline{T_1}) = \frac{8}{45}$	**0,5** **chacun**
	c-	$P(T_2) = P(T_2 \cap T_1) + P(T_2 \cap \overline{T_1}) = 0,2$	**0,5**

<table>
<tr><th colspan="3">Question IV</th><th>Note</th></tr>
<tr><td>1)</td><td colspan="2">• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.</td><td>0,25
0,25</td></tr>
<tr><td>2)</td><td colspan="2">• $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) - y_{(D)}\right) = 0$.
• $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - y_{(L)}\right) = 0$.</td><td>0,25
0,25</td></tr>
<tr><td>3)</td><td colspan="2">• $D_f = \mathbb{R}$ centeree au 0 et $f(-x) + f(x) = -1$.</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4)</td><td>a-</td><td>• $f'(x) = \dfrac{e^{2x} + e^{x} + 1}{\left(e^{x} + 1\right)^{2}}$
• $f'(x) > 0$ car $e^{x} > 0$</td><td>0,5
0,25</td></tr>
<tr><td>b-</td><td>$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & +\infty \end{array}$$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5)</td><td>a-</td><td>$y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>b-</td><td>• $f(0) = -\dfrac{1}{2}$; alors E appartient à (C). (T) tangente à to (C) au E, alors E appartient à (T)
• $f(x) - y_{(T)} = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{e^{x}}{e^{x}+1} + \dfrac{1}{2}$; (C) coupe (T) en E; pour $x < 0$: (C) est au dessous de (T); pour $x > 0$: (C) est au dessus de (T); pour $x = 0$: (C) coupe (T)</td><td>0,5

0,5</td></tr>
<tr><td>6)</td><td colspan="2">$f''(x) = \dfrac{e^{x}(e^{x}-1)}{(e^{x}+1)^{3}}$; au 0: $f''(0) = 0$ et $f''(x)$ change de signe (– au +).</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td>7)</td><td colspan="2">Sur $\mathbb{R}$: f est continue, strictement croissante de $-\infty$ au $+\infty$, alors $f(x) = 0$ admet une solution unique α. $f(0,6) = -0,04 < 0$ et $f(0,7) = 0,03 > 0$; $f(0,6) \times f(0,7) < 0$; $0,6 < \alpha < 0,7$.</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td>8)</td><td colspan="2">
</td><td>1
(C)</td></tr>
</table>

	a-	Déjà tracée	**0,5**
	b-	$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \\ y = x \end{cases}$; y = y; x = –2 et y = –2.; F(–2 , –2)	**0,5**