Classe : $3^{ème}$ Année SG Année scolaire : 2010-2011

Matière : Mathématiques

Exercice 1 : (24 pts)

Chaque question a une seule réponse correcte .Choisir avec justification les réponses correctes.

	Questions	Réponses possibles			
		A	B	C	D
1	Soit $f(x) = \cos(2\ arc\ sinx)$ Simplifier $f(x)$	$2x^2 - 1$	$2x\sqrt{1-x^2}$	$\sqrt{1-4x^2}$	$1-2x^2$
2	$f(x) = \sin(\pi x) + \sqrt{x^2+1}$, f'(0)=-----	0	1	π	$1-\sqrt{(1-\pi)^2}$
3	Un argument du nombre complexe z= (1+i)(sint-icost) est	$\frac{\pi}{4} - t$	$t - \frac{\pi}{4}$	$t + \frac{\pi}{4}$	$-t - \frac{\pi}{4}$
4	Soit A (-1 ; 3 ; 1) et B(3 ;1 ;5);l'équation du plan médiateur de [AB] est :	2x-y+2z-6=0	x-2y+2z-6=0	x-y+z-6=0	2x+y-2z-6=0
5	$Soit\ \ g(x) = \frac{2x}{x-1}$ et $h(x) = \sqrt{x-3}$ le domaine de définition de $hog\ est$:	]1 ;3]	IR-{1}	$[1; +\infty[$	[1 ;3]
6	Pour les vecteurs : $\vec{a}$(1 ;1 ;0),$\vec{b}$(-2 ;0 ;1) et $\vec{c}$(0 ;3 ;1) on a $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = ---$	(6 ;6 ;-5)	(-6 ;6 ;5)	(-3 ;2 ;0)	(3 ;-2 ;0)

Exercice 2 : (24 pts)

On considère les points A (3 ; 2 ; 6), B (1 ; 2 ; 4) et C (4 ;-2 ; 5).

Soit le plan (Q) d'équation $x + 2y + 2z - 3 = 0$.

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle. (4 pts)

2) Calculer la distance du point A à la droite (BC). (4 pts)

3) Trouver une équation du plan (P) déterminé par les points A, B et C. (4 pts)

4) Vérifier que (P) et (Q) sont perpendiculaires et calculer la distance de O à leur droite d'intersection (L). (4 pts)

5) Calculer le volume du tétraèdre OABC. En déduire la distance de O au plan (P). (4 pts)

6) On définit un point G par $3\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. On note I le centre de gravité du triangle ABC ; montrer que G est le milieu de [OI]. (4 pts)

<u>Exercice 3</u> : (24 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$; on considère les points A et B d'affixes respectives z_A=2 et z_B=3.

<u>Partie A</u>.

1) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives :

$z_1=2+i\sqrt{2}$ et $z_2=2-i\sqrt{2}$.

a- Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_1-3}{z_1}$. (3 pts)

b- En déduire que le triangle OBM_1 est rectangle. (3 pts)

2) Démontrer géométriquement que les points $O\ ,B,M_1 et\ M_2$ appartiennent à un même cercle (T) que l'on déterminera. (3 pts)

<u>Partie B.</u>

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' défini par $z'=z^2-4z+6$.

Soit (Γ) le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

Soit M un point de (Γ) tel que $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\theta$ où $-\pi<\theta\leq\pi$.

1) Vérifier que l'affixe de M est $z=2+\sqrt{2}e^{i\theta}$. (3 pts)

2) Vérifier que $z'=2+2e^{2i\theta}$ et que M' est situé sur un cercle (Γ'). (4 pts)

3) Soit D le point d'affixe $d=2+\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}$ et soit D' le point associé à D.

a- Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe $d-2$ et en déduire que D appartient au cercle (Γ). (4 pts)

b- Donner une mesure de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{AD'})$ et montrer que le triangle OAD' est équilatéral. (4 pts)

Exercice 4 : (24 points)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \arctan(x^2+1) + \arctan\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$.

1) a) Calculer $f(0)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (3 pts)

b) Quelle conjecture peux-tu former à propos de $f(x)$? (2 pts)

c) Calculer $f'(x)$. En déduire que $f(x)$ a une valeur constante que l'on déterminera. (3 pts)

d) Vérifier que $\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{2}{3} = \frac{\pi}{4}$ (3 pts)

e) En déduire la valeur en radians de l'expression :

E=arctan5 +arctan $\left(\frac{3}{2}\right)$ (3 pts)

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = \arctan(2x) + \arctan(3x) - \frac{\pi}{4}$

a) Etudier les variations de g. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α. (4 pts)

b) Vérifier que $0 < \alpha < 1$. (3 pts)

c) Résoudre $g(x) = 0$. En déduire la valeur exacte de α. (3 pts)

Exercice 5 (8 pts)

On définit sur $\mathbb{R}$ deux fonctions f et g définies par : $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ $et\ \ g(x) = x^3 + 5x^2 - 11x + 8$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique k puis trouver une valeur approchée de k à 0.1 près par défaut. (3 pts)

2) Prouver que $g(k) > 0$. (2 pts)

3) Calculer $(f\circ g)'(1)$. (3 pts)

Exercice 6 : (56 pts)

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = -2x^2 - 1 + lnx$.

1) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe. (4 pts)

2) Dresser le tableau de variations de g. (4 pts)

3) En déduire le signe de $g(x)$. (4 pts)

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 - 2x - \frac{lnx}{x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (R).

Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1) a) Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat. (4 pts)

b) Calculer la limite de f en $+\infty$. (4pts)

c) Démontrer que la droite (L) d'équation $y = -2x + 1$ est une asymptote à la courbe (C). (4pts)

d) Etudier la position relative de (C) et (L). (4 pts)

2) a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. (4 pts)

b) Dresser le tableau de variations de f. (4 pts)

c) Ecrire une équation de la tangente (T) menée à (C) au point d'abscisse x=1 (4 pts)

3) Tracer (L), (T) et (C) dans le repère (R). (4pts)

4) Calculer la valeur exacte en cm^2 de l'aire S ; de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1 et x=e. Donner la valeur arrondie au mm^2 près. (4 pts)

5) Soit h la fonction réciproque de f. Calculer h' (-1). (4 pts)

6) Soit K la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $K(x) = \ln\left(1 + f^2(x)\right)$. Calculer K'(1). (4 pts)

Bon travail