SG

Exercice 1 (20 pts)

a. $5 - 12i = 9 - 4 - 12i = (3 - 2i)^2$

Les racines carrées de $5 - 12i$ sont: $3 - 2i$ et $-3+2i$. (1,5)

b. $Z^2 - (1 + 4i) z - 5 + 5i = 0$

$w^2 = b^2 - 4ac = 5 - 12i = (3 - 2i)^2$

$w = 3 - 2i$ ou $w= -3 + 2i$

$Z_1 = \dfrac{-b+w}{2a} = 2 + i$ et $Z_2 = \dfrac{-b-w}{2a} = -1 + 3i$. (1,5)

2) (E): $Z^3 - (1 + 2i)Z^2 + 3(1 + i)Z - 10(1+ i) = 0$

a. $(-2i)^3 - (1+2i)(-2i)^2 + 3(1+ i)(-2i) - 10 (1+i)$

$= 8i + 4 + 8i - 6i + 6 - 10 - 10i = 0.$

Donc $Z = -2i$ est une racine de (E). (1,5)

b. $Z^3 - (1 + 2i) Z^2 + 3 (1+ i)Z - 10 (1+ i)$

$= (Z + 2i) (Z^2 + bZ + c) = 0.$

Coefficient de Z^2: $-1 - 2i = 2i + b$ alors $b = -1 - 4i$

Coefficient de Z: $3 + 3i = c + 2ib$

$c = 3 + 3i - 2i (- 1 - 4i)= - 5 + 5i$

Verification : $2ic = 2i (- 5 + 5i) = -10 - 10i.$ (1,5)

c. $(Z + 2i) (Z^2 - (1 + 4i) Z - 5 + 5i) = 0$

$Z = -2i$; $Z= 2+ i$ ou $Z= - 1 + 3i$ (1½pt)

3) a) Placer A (2+i) B (-1+3i) et C(-2i) (1pt)

b) $\dfrac{Z_{\overrightarrow{AC}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}} = \dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - B_A} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Donc $\frac{AC}{AB}$ = 1 et ($\underset{AB}{\rightarrow}$; $\underset{AC}{\rightarrow}$) = $\frac{\pi}{2}$ (2π)

Alors le triangle ABC est

rectangle isocèle en A. (2pts)

C) D(Z_D = -3)

$\frac{Z_D - Z_A}{Z_C - Z_B} = \frac{-5-i}{1-5i}$ = -i = $e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$\frac{Z_{\underset{AD}{\rightarrow}}}{Z_{\underset{BC}{\rightarrow}}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ AD = BC et ($\underset{BC}{\rightarrow}$; $\underset{AD}{\rightarrow}$) = $\frac{-\pi}{2}$ (2π) (les diagonals sont égales et sont perpendiculaires)

Donc: ABDC est un carré. (2pts)

4) Soit U = -7 + 24i

a) Vérifier que 2+i est une racine 4ieme de U.

$(2+i)^4 = \left((2+i)^2\right)^2 = (3+4i)^2 = -7 + 24i$ = U. (1½pts)

b) $Z^4 = -7 + 24i = (2+i)^4$… (E')

Donc Z_0 = 2+i est une solution alors les solution de (E') sont Z_0 = 2 + i ; - Z_0 = - 2 - i

iZ_0 = -1 + 2i et – iZ_0 = 1 - 2i (1½pt)

5) W = ($\sqrt{2}$ - $\sqrt{6}$) + i ($\sqrt{2}$ + $\sqrt{6}$)

a) Calculer W^2 et chercher sa forme exponentielle.

$W^2 = (\sqrt{2} - \sqrt{6})^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{6}) + 2i(\sqrt{2} - \sqrt{6})(\sqrt{2} + \sqrt{6})$

$W^2 = -8\sqrt{3} - 8i$

$W^2 = 16\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 16\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$W^2 = 16e^{\frac{7i\pi}{2}}$ (2½ pts)

b) on pose $w = r\,e^{i\alpha}$

$W^2 = r^2 e^{2i\alpha} = 16\,e^{\frac{7i\pi}{2}}$

$r^2 = 16$ $\qquad\qquad$ $2\alpha = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$

$r = 4$ $(r > 0)$ $\qquad\qquad$ $\alpha = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi$ $\quad$ avec $k = 0$ ou $k = 1$

et

$Re(W) < 0$; $Im(W) > 0$

Alors W se termine dans le 2ieme quadrant.

$\alpha = \dfrac{7\pi}{12}$ Donc $W = 4\,e^{\frac{7i\pi}{12}}$

Donc: $4\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right) = (\sqrt{2} - \sqrt{6}) + i(\sqrt{2} - \sqrt{6}) = a + ib$

$\tan\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = -2 - \sqrt{3}$ $\qquad$ (2pts)

EX. 2 (25pts) $\quad f(x) = x + \sqrt{x^2+4}$ $\quad$ (C) sa sourbe représentative.

1) a) Montrer que les deux droite d'équations $y = 0$ et $y = 2x$ sont asymptotes à (C).

* au voisinage de $-\infty$: $\sqrt{x^2+4} = x + \varphi(x)$

Avec $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$

à $-\infty$ $\qquad$ $f(x) = \varphi(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une (A.H).

* au voisinage de $+\infty$ $\sqrt{x^2+4} = x + \varphi_1(x)$ $\quad$ avec $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi_1(x) = 0$

à $+\infty$ $\qquad$ $f(x) = 2x + \varphi_1(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_1(x) = 0.$ $\qquad$ Alors la droite d'équation $y = 2x$ est une (A.o) à (C) en $+\infty$. $\qquad$ (2pts)

b) Etudier la position de (C) par rapport à ses asymptotes

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+4}$$

* si $x \geq 0$ $\quad$ $f(x) > 0$

Pour $x \geq 0$ $\quad$ (C) au dessus de x'0x

* si $x < 0$ $\quad$ $f(x) = \sqrt{x^2+4} + x = \dfrac{(\sqrt{x^2+4}+x)(\sqrt{x^2+4}-x)}{(\sqrt{x^2+4}-x)}$

$f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}-x} > 0$ $\quad$ pour x <0 (C) du dessus de x'0x

\+ \+

Donc pour tout reel x (C) au dessus de x'ox.

$$f(x) - 2x = \sqrt{x^2+4} - x$$

* Pour $-x \geq 0$ $\quad$ alors $x \leq 0$ $\quad$ $f(x) - 2x > 0$

(C) au dessus de la droite (d_1) d'équation $y = 2x$

* Pour $-x < 0$ alors $x > 0$.

$$f(x) - 2x = \sqrt{x^2+4} - x = \frac{(\sqrt{x^2+4}-x)(\sqrt{x^2+4}+x)}{(\sqrt{x^2+4}+x)} = \frac{4}{(\sqrt{x^2+4}+x)} > 0$$

\+ \+

Pour $x > 0$ (C) au dessus de la droite (d_1)

Donc pour tout réel x, (C) au dessus de (d_1). (2 pts)

2) a) Montrer que f est strictement croissante sur IR.

Dresser son tableau de variations.

$f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}} > 0$ d'aprés b)

b) Trouver l'équation de la tangente (T) à (C) au point A d'abscisse 0.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(2pts)

L'équation de (T) est:

$y = x \times f'(0) + f(0)$ avec $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$

(T): $y = x + 1$

d)Montrer que f admet une fonction réciproque g.

Préciser son domaine de definition

* f est continue sur IR (f est désivable sur IR, donc elle est continue sur IR)

* f est strictement monotone sur IR (strictement croissante) d'après T.V

$D_g = f(\,]-\infty\,;+\infty[\,) = \,]0\,;+\infty[$ d'après (T.V) (1½pt)

e) Trouver la forme explicite $y = g(x)$

$f\circ g(x) = x$ pour tout réel $x \in \,]0\,;+\infty[$

$f(g(x)) = x$ on pose $z = g(x)$

$f(z) = x$ donc $z + \sqrt{z^2+4} = x$ avec $x \in \,]0\,;+\infty[$

$\sqrt{z^2+4} = x - z$ $(x \geq z)$ $z = g(x) \in \,]-\infty\,;+\infty[$

$Z^2 + 4 - (x-z)^2 - x^2 + z^2 - 2xz.$

$Z = \dfrac{x^2-4}{2x} = g(x)$ $x \in \,]0\,;+\infty[$ $x > 0$ (1½pt)

f) Tracer la courbe representative (C^1) de g

Dans un repère orthonormal les courbes (C) et (C^1)

sont symétrique par rapport à la 1ere bissectrice d'équation $y = x$. (1pt)

g) Calculer $g'(2)$.

$(g\circ f)(x) = x$ pour tout réel x de IR

$g(f(x)) = x$ dérivons par rapport à x

$f'(x) \times g'(f(x)) = 1$ on pose $f(x) = y$

$f'(x) \times g'(y) = 1$ pour $y = 2$ $f'(x) \times g'(2) = 1$ or $f(0) = 2$

f' (0) × g'(2) = 1 or f' (0) = 1

$$g'(2) = \frac{1}{f'(0)} = 1$$ (1½pt)

h) Pour tout réel non nul x_0, on désigne par M et M'
les points de (C) d'abscisses respectives x_0 et $-x_0$.

Montrer que $f(x_0) - f(-x_0) = 2x_0$ et que la droite
(MM') garde une direction fixe

* M $(X_0 ; f(x_0))$ M' $(-x_0 ; f(-x_0))$ avec $x_0 \neq 0$

$f(x_0) = x_0 + \sqrt{x_0^2 + 4}$; $f(-x_0) = -x_0 + \sqrt{x_0^2+4}$

$f(x_0) - f(-x_0) = 2x_0$

* Pente de (MM') = coefficient directeur de (MM')

$$= \frac{f(x_0) - f(-x_0)}{2x_0} = 1 = cte$$

Donc (MM') a une direction fine (// à y = 2x) (2 pts)

3) (H) La courbe d'équation $y^2 - 2xy - 4 = 0$

2) Montrer que (H) = (C) U (C'')

$y^2 - 2xy + x^2 - x^2 - 4 = 0$ alors $(y - x)^2 = x^2 + 4$

$y - x = \sqrt{x^2+4}$ ou $y - x = -\sqrt{x^2+4}$

$y = x + \sqrt{x^2+4}$ (C) ou $y = x + \sqrt{x^2+4}$ (C'')

Donc (H) = (C) U (C'') avec (C'') la courbe d'équation $y = x - \sqrt{x^2+4}$ (1½ pt)

c) Montrer que (C'') est symétrique de (C) par rapport à l'ongine. Tracer (C'').

$y = f(x) = x + \sqrt{x^2+4}$; $y = h(x) = x - \sqrt{x^2+4}$

$f(-x) = -x + \sqrt{x^2+4} = -(x - \sqrt{x^2+4}) = -h(x)$

$f(-x) = -h(x)$ pour tout réel x (2pts)

Alors (C) et (C'') sont symétriques par rapport à l'ongine

4) (d): y = x + m

Montrer que lorsque (d) coupe

(C) en deux points N_1 et N_2

alors les abscisses

de N_1 et N_2 sont

opposées et que les tangentes

en N_1 et N_2 à (C) se coupent

en un point situé sur l'axe y'oy.

$(C) \cap (d)$: $x + \sqrt{x^2+4} = x + m$

Donc $\sqrt{x^2+4} = m$ avec $m \geq 2$

$x^2 + 4 = m^2$ alors $x^2 = m^2 - 4$ $\quad$ $x = \sqrt{m^2-4}$ ou $x = -\sqrt{m^2-4}$

Donc (d) coupe (C) en deux points d'abscisses

$x_{N_1} = +\sqrt{m^2-4}$ et $x_{N_2} = -\sqrt{m^2-4}$ sont opposées.

* Equation de la tangente (T_1) en N_1 ($\sqrt{m^2-4}$; m+ $\sqrt{m^2-4}$) à (C)

$y = (x - \sqrt{m^2-4})(1 + \frac{\sqrt{m^2-4}}{m}) + m + \sqrt{m^2-4}$

pour x = 0 $\quad y = -\sqrt{m^2-4} - \frac{m^2-4}{m} + m + \sqrt{m^2-4} = \frac{4}{m}$

Donc (T_1) coupe y'oy en $(0 ; \frac{4}{m})$

* Equation de la tangente (T_2) en N_2 ($-\sqrt{m^2-4}$; m - $\sqrt{m^2-4}$) à (C)

$y = (x + \sqrt{m^2-4})(1 - \frac{\sqrt{m^2-4}}{m}) + m + \sqrt{m^2-4}$

pour x = 0 $\quad y = \frac{4}{m}$

Donc (T_2) coupe y'oy en $(0 ; \frac{4}{m})$.

Par suite (T_1) et (T_2) se coupent en I (; $\frac{4}{m}$) qui est situé sur y' oy. (2pts)

5) u (x) = f(x) - x = $\sqrt{x^2+4}$; v(x) = $\frac{2x+3}{x-3}$

W = v o u

a) Déterminer le domaine de définition de w = v o u

w (x) = v (u(x)) * x $\in$ D_u = IR

et

* u (x) $\in$ D_v = IR – {3}

Donc u (x) $\neq$ 3

x $\neq \sqrt{5}$

$\sqrt{x^2+4} \neq 3$ $x^2 \neq 5$ et (1½ pt)

x $\neq - \sqrt{5}$

Donc $D_w = R - \{ -\sqrt{5} ; \sqrt{5} \} \longrightarrow] -\infty ; -\sqrt{5}$ [U] $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$ [U] $\sqrt{5}$; $+\infty$[

b) Calculer w' (o) w(x) = v (u(x))

w' (x) = u' (x) × v' (u(x))

w' (0) = u' (0) × v' (u(0)) avec u(0) =2

w' (0) = u' (0) × v' (2)

u' (x) = $\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ u' (0) = 0

v'(x) = $\frac{-9}{(x-3)^2}$ v'(2) = -9

Donc w'(0) = (0) (-9) = 0 (1½ pt)

Exercice 3: (5points)

Caculer BC et les angles

B et C.

* $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\ AB \times AC \times \cos 45°$

$BC^2 = (1 + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2\,(1 + \sqrt{3})\,(\sqrt{6})\,(\frac{\sqrt{2}}{2})$

Donc $\quad BC^2 = 4 \quad\quad BC = 2$

* Calcule de B et C

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin c} = 2R.$$

$$\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sin B} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sin C} = 2R$$

$\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\quad$ puisque $\cos b = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$

$\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos B = \frac{1}{2}$ alors $B = 60°$

$C = 180° - (60° + 45°) = 75°$ (2 pts)

2) $\frac{a}{\sin A} = 2R \quad\quad 2R = \frac{4}{\sqrt{2}}$ donc $R = \sqrt{2}$

L'aire S du triangle ABC est:

$S = \frac{1}{2}\ AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{2}\ (1 + \sqrt{3})\,(\sqrt{6})\,(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ unités d'aire. (2 pts)

3) Calculer la mesure de la hauteur [AH] relative à [BC].

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\ AH \times BC = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

$BC = 2$ donc $AH = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ (1pt)