Classe : Terminale SG
Matière : Mathématiques   Année scolaire : 2010- 2011

Exercice 1 (16 pts)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

Ecrire le numéro de chaque question, en justifiant la réponse qui lui correspond.

		Réponses			
N°	Questions	a	b	c	d
1)	$z = \frac{5i}{(1-i)^2} e^{-i\frac{\pi}{5}}$ Un argument de z est :	$-\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{5}$	$7\frac{\pi}{5}$	$4\frac{\pi}{5}$
2)	$\ln[C_k^0 + C_k^1 + \cdots + C_k^k] =$	k ln2	k ln4	(k+1) ln2	2^4
3)	$L(x) = \int_x^{2x} \sqrt{1+t^2}\, dt$ L(0) +L'(0) =-----	0	1	2	3
4)	Cos (2 arc cosx^2)=----	$2x^4$-1	1-$2x^4$	$2x^2$	1
5)	a ; b et c sont les racines de l'équation: z^3+z-1=0. Le produit abc=	-1	0	1	îi
6)	Le coefficient de x^8 dans le développement de $\left(3x - \frac{2}{x}\right)^{12}$ est :	$2^3 \times 3^{11} \times 11$	$2^6 \times 3^{10} \times 11$	$2^{11} \times 3^2 \times 11$	$2^6 \times 3^{12} \times 11$
7)	H=$\int_1^2 xe^x\, dx + \int_{-2}^2 x \sin^6 x\, dx$ ln(H) est égal à :	1	2	e^2	e
8)	Le nombre de diagonales d'un polygone convexe de dix cotés est :	45	50	35	30

Exercice 2 (24 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$) .

On donne les points A(-1 ;2 ;2) ;B(-1 ;1 ;3) ;C(1 ;1 ;1) et E(1 ;3 ;5).

1) a) Montrer que les points E ; B et C ne sont pas alignés. (3 pts)

b) Vérifier que le plan (P) déterminé par E ; B et C a pour équation : x-2y+z=0. (3 pts)

c) Ecrire une équation du plan (Q) passant par A et perpendiculaire à (AC). (3 pts)

d) Trouver la mesure de l'angle aigu que forme (P) avec (Q). (3 pts)

2) Montrer que le triangle ABC est rectangle et que BC=2BA. (5 pts)

3) a) Trouver une équation du plan médiateur (T) du segment [BE]. (3 pts)

b) H étant le milieu de [BC], on désigne par (Δ) la droite passant par H et perpendiculaire au plan (ABC) et on appelle W le point d'intersection de (Δ) avec le plan (T).

Montrer que W est équidistant des points A, B, C et E. (4 pts)

Exercice 3 (24 pts)

On donne quatre fonctions U, V, T et L telles que : $U(x) = x + 1;\ V(x) = 2x^2 + x - 1$

$T(x) = \sqrt{x+1}$ et $L(x) = \int_{U(x)}^{V(x)} \sqrt{1+t^4}$ dt.

1) Sans calculer $ToV(x)$, trouver le domaine de définition de ToV et calculer (ToV)'(0). (6 pts)

2) a) Vérifier que L (1) =L (-1) et calculer L'(0). (6 pts)

b) Justifier que si -1<x<1 alors que L(x)<0. (3 pts)

c) Prouver que $L(0) = -2\int_0^1 \sqrt{1+t^4}\ dt$.

Donner un encadrement de L(0). (6 pts)

d) Trouver l'équation de la tangente à (C_L) au point A d'abscisse 1. (3 pts)

Exercice 4 (16 pts)

Les tailles de 36 élèves de SG sont données dans ce tableau.

Classes C_i Tailles	[150 ; 160]	[160 ; 170]	[170 ; 180]	[180 ; 190]
Effectifs n_i	4			16
E.C.C		12	20	
Centres x_i				

1) Compléter le tableau donné. (2 pts)

2) Construire l'histogramme des effectifs. Déduire une valeur approchée de la médiane et donner une interprétation. (4 pts)

3) Retrouver une valeur approchée de la médiane en utilisant le polygone des E.C.C. (4 pts)

4) Calculer la moyenne $\bar{X}$ et l'écart type de cette série. Interpréter les résultats. (3 pts)

5) On interroge au hasard trois élèves sur leurs tailles.
Quelle est la probabilité pour que ces tailles dépassent 170 cm ? (3 pts)

Exercice 5 (24 pts)

Un enfant joue avec 20 billes : **12 rouges** et **8 vertes**.
Il met 10 rouges et 5 vertes dans une boîte A et 2 rouges et 3 vertes dans une boîte B.
1- Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard de la boîte A.
On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.
   a-Déterminer la loi de probabilité de X. (4 pts)
   b- Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X .Interpréter les résultats. (4 pts)
2-Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, de la boîte choisie.
   a- Calculer la probabilité de l'événement R : «L'enfant prend une bille rouge » (4 pts)
   b- Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte A ? (4 pts)
3- L'enfant reproduit 5 fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.
   a- Calculer la probabilité que l'enfant ait pris exactement deux billes rouges. (4 pts)
   b- Calculer la probabilité que l'enfant ait pris au moins deux billes rouges. (4 pts)

Exercice 6 (56 pts)

<u>Partie A :</u>

Soit h la fonction définie sur IR par h(x)= $(2-x)e^x-2$
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$; en déduire une asymptote à (C). (4 pts)
2) Calculer h'(x) et dresser le tableau de variations de h. (4 pts)
3) Trouver l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0. (4 pts)
4) Montrer que l'équation h(x)=0 admet deux racines 0 et α et vérifier que 1,5 <α<1,6. (4 pts)
5) Tracer (C). En déduire le signe de h(x). (4 pts)
6) Calculer l'aire du domaine limité par (C), l'axe x'x et les deux droites d'équations x=0 et x=1. (4 pts)

<u>Partie B</u>

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{e^x-2}{e^x-2x}$
On désigne par (T) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que la fonction g définie sur IR par g(x)= e^x-2x est positive et en déduire le domaine

de définition de f. (4 pts)

2) Montrer que les droites d'équations $y=0$ et $y=1$ sont asymptotes à (T). (4 pts)

3) Montrer que $f'(x)$ et $h(x)$ sont de même signe et dresser le tableau de variations de f. (4 pts)

4) Montrer que $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}$. En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de $f(\alpha)$ pour $\alpha=1{,}55$.

(4 pts)

5) Tracer (T). Préciser le point d'intersection de (T) avec x'x et avec la droite d'équation $y=1$.

(4 pts)

6) Soit S_n l'aire du domaine limité par (T), la droite d'équation $y=1$ et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=n$ avec $n>1$.

Calculer S_n et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ (4 pts)

Partie C :

Soit u la fonction donnée par $u(x)=\ln(\,f(x)\,)$ et (C_u) sa courbe représentative .

1) a) Justifier que le domaine de définition est $]\ln 2\,;+\infty[$.

Trouver les asymptotes à (C_u). (4 pts)

b) Calculer $u'(x)$ et dresser le tableau de variations de u. (4 pts)

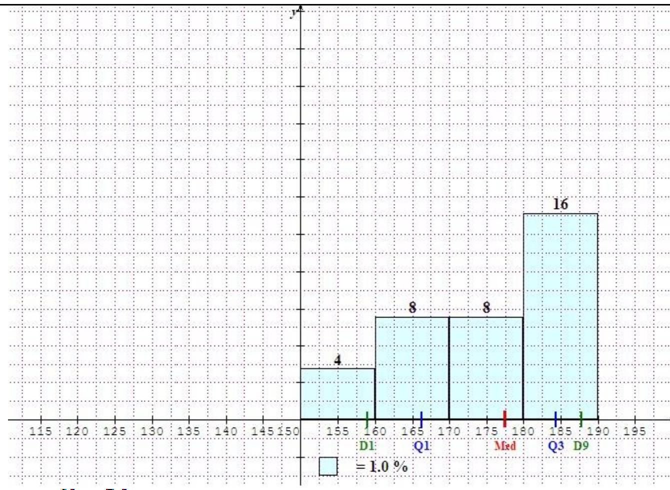
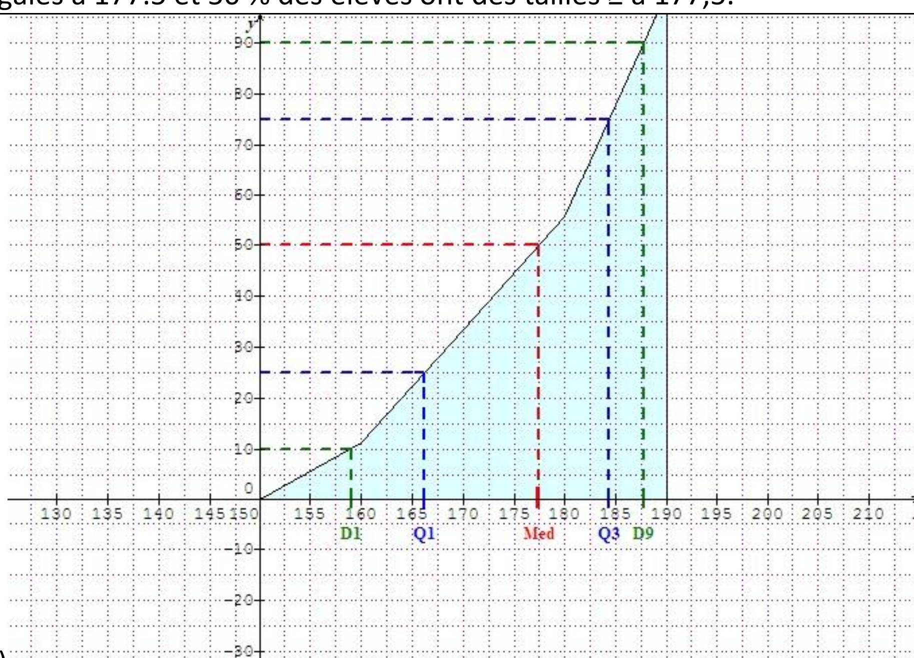
Bon travail

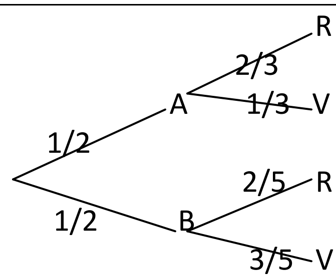
Barème SG (Contrôle 2)

Exercices	Solutions	Notes
1	1) $z=\frac{5i}{(1-i)^2}e^{-\frac{i\pi}{5}}=\frac{-5}{2}e^{-\frac{i\pi}{5}}=\frac{5}{2}e^{i\pi}\times e^{-\frac{i\pi}{5}}=\frac{5}{2}e^{\frac{4i\pi}{5}}$; argz = $\frac{4\pi}{5}$ **(d) est correcte**	**2**
	2) $\ln\left[C_k^0+C_k^1+\cdots+C_k^k\right]$=ln($2^k$)=kln2 ; **(a) est correcte**	**2**
	3) L(0)=0 ; $L'(x)=2\sqrt{1+(2x)^2}-\sqrt{1+x^2}$; L'(0)=2-1=1 Donc L(0)+L'(0)=1 . **(b) est correcte**	**2**
	4) On pose arc cos x^2= a; cos a=x^2; 0≤ cosa≤1 et 0≤a≤ $\frac{\pi}{2}$ A=cos (2a) =2 $\cos^2$a-1=2x^4-1. **(a) est correcte**	**2**
	5) (z-a) (z-b) (z-c)=z^3+z-1 ; -abc=-1 alors abc=1. **(c) est correcte**	**2**
	6) $(3x-2x^{-1})^{12}=(3x+(-2x))^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k(3x)^k\times(-2x^{-1})^{12-k}$ $(3x-2x^{-1})^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k\,3^k\times(-2)^{12-k}\times x^{2k-12}$;le coefficient de x^8 est obtenu pour 2k-12=8 ; k=10 donc l e coefficient de x^8 est $C_{12}^{10}\,3^{10}\times 11$ $=2^3\times 3^{11}\times 11$. **(a) est correcte**	**2**
	7) On pose A=$\int_{-2}^{2}x\sin^6 x\,dx$; f(x)=x $\sin^6$x ; f est continue sur [-2 ; 2] et elle est impaire car elle est centrée en zéro et f (-x)=-f(x) donc A=0 $Une\ primitive\ de\ xe^x est\ F(x)=\ xe^x-e^x=e^x(x-1)$ $\int_{-2}^{2}xe^x dx=[(x-1)e^x]_{-2}^{2}$ = e^2. **(c) est correcte**	**2**
	8) Soit n le nombre de diagonales d'un polygone convexe de 10 cotés m=C_{10}^2=Nombre de diagonales +Nombre de cotés. C_{10}^2=n+10 donc n=45-10=35 diagonales. **(c) est correcte**	**2**
	1	
	a) E ; B et C ne sont pas alignés si et seulement si $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BE}\neq\vec{0}$ $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BE}$ = $4\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k}\neq\vec{0}$ donc E ; B et C ne sont pas alignés	**3**
	b) $x_E-2y_E+z_E$=1-6+5=0 alors E est un point du plan (P) $x_F-2y_F+z_F$=-1-2+3=0 alors F est un point du plan (P) $x_C-2y_C+z_C$=1-2+1=0 alors C est un point du plan (P) Donc l'équation du plan (P) qui est confondu au plan (EBC) :x-2y+z=0	**3**
	c) A (-1 ; 2 ; 2) est un point de (Q) ; $\overrightarrow{AC}$= $\overrightarrow{n'}$(2 ;-1 ;-1) est un vecteur normal à	

2	(Q). M(x ; y ; z) est un point quelconque ; M est un point de (Q) si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}$=0 ; $\overrightarrow{AM}$(x+1 ; y-2 ; z-2) $\overrightarrow{n'}$(2 ;-1 ;-1) (Q) : 2x-y-z+6=0	**3**
	d) L'angle aigu que forme (P) avec (Q) est l'angle aigu de $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ $\vec{n}$ (1 ;-2 ; 1) ⊥ (P) ; $\overrightarrow{n'}$(2 ;-1 ;-1)⊥ (Q) Cos ($\vec{n};\overrightarrow{n'}$)=$\frac{\vec{n}.\overrightarrow{n'}}{\Vert\vec{n}\Vert\times\Vert\overrightarrow{n'}\Vert} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; donc l'angle aigu de (P) avec (Q) est 60^{o}	**3**
	2) $\overrightarrow{AB}$ (0 ;-1 ; 1) $\overrightarrow{AC}$ (2 ;-1 ;-1) ; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ =XX'+YY'+ZZ'=1-1=0 alors le triangle ABC est rectangle en A ; $\overrightarrow{BC}$ (2 ; 0 ;-2) ; BC= $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; AB= $\sqrt{2}$ Donc BC=2BA	**5**
	3	
	a) Soit I le milieu de [BE] ; I (0 ; 2 ; 4) ; I est un point de (T) ; $\overrightarrow{BE}$ (2 ; 2 ; 2) est orthogonal à(T) ; M(x ; y ; z) est un point de (T) si et seulement si $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{BE}$=0 ; (T) : x+y+z-6=0	**3**
2	b) Soit H le milieu de [BC] ; H (0 ; 1 ; 2). Le triangle ABC est rectangle en A H est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. H est le centre de ce cercle ;(Δ) est la perpendiculaire au plan du cercle passant par le centre H. (Δ) est l'axe du cercle. Tout point de (Δ) est équidistant de A ; B et C alors WA=WB=WC. W est un point de (T) alors WA=WE Donc WA=WB=WC=WE. Autrement (Δ)⊥(ABC) ; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de (Δ) ;$\vec{N}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$; H(0 ;1 ;2) est un point de (Δ) $(\Delta) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t+1 \\ z = 2t+2 \end{cases}$ c'est un système d'équations paramétriques de (Δ) W est un point de (Δ) alors W(2t ;2t+1 ;2t+2) ; W est un point de (T) si et seulement si $x_W+y_W+z_W-6=0$; 2t+2t+1+2t+2-6=0 ; t=$\frac{1}{2}$ alors W(1 ;2 ;3) $\overrightarrow{WA}(-2;0;-1)$;$\overrightarrow{WB}$(-2 ;-1 ;0) ;$\overrightarrow{WC}(0;-1;-2)$;$\overrightarrow{WE}(0;1;2)$ WA=WB=WC=WE=$\sqrt{5}$ (unité de longueur) par suite W est équidistant des points A ; B ;C et E .	**4**
	1) Il faut que $\begin{cases} x \in D_V \\ V(x) \in D_T \end{cases}$; $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ V(x) \in [-1;+\infty[\end{cases}$ $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ V(x) \geq -1 \end{cases}$ $V(x)=2x^2+x-1 \geq -1$; $2x^2+x=x(2x+1) \geq 0$ donc x $\in \left]-\infty;\frac{-1}{2}\right] \cup [0;+\infty[$ $D_{T_oV}=\left]-\infty;\frac{-1}{2}\right] \cup [0;+\infty[$. $(T_oV)'(0)=V'(0)\times T'(V(0))$ avec V(0)=-1 $(T_oV)'(0$= V'(0)$\times$ T'(-1) avec V'(x)=4x+1 ; V'(0)=1 ; T'(x)=$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$; T'(0)= $\frac{1}{2}$ Donc $(T_oV)'(0)=\frac{1}{2}$	**6**
	2	

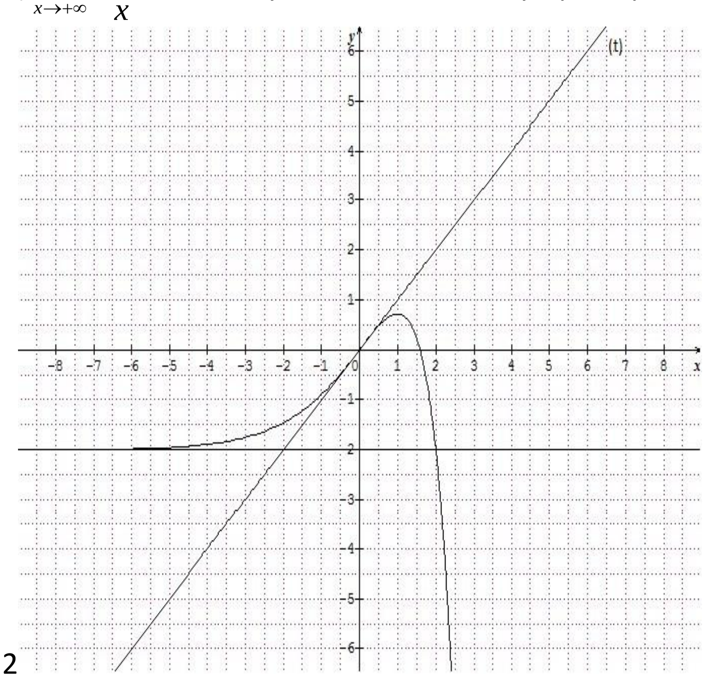
<table>
<tr><td>3</td><td>a) L(1)=$\int_{U(1)}^{V(1)}\sqrt{1+t^4}$ dt ; U(1)=V(1)=2 alors L(1)=0 ($\int_a^a f(t)dt=0$)
L (-1)= $\int_{U(-1)}^{V(-1)}\sqrt{1+t^4}dt$; U (-1)=0 ; V (-1)=0 alors L (-1)=0
$L'(x)=V'(x)\sqrt{1+V^4(x)}-U'(x)\sqrt{1+U^4(x)}$
L'(0)= $V'(0)\sqrt{1+V^4(0)}-U'(0)\sqrt{1+U^4(0)}$;V'(x)=4x+1 ; V'(0)=1 ; V(0)=1.
U'(x)=1 ; U'(0)=1 ; U(0)=1
L'(0)=$\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$</td><td>6</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3</td><td>b) On a $\sqrt{1+t^4}$ >0 pour tout réel t donc si U(x)<V(x) alors L(x)>0
si U(x)> V(x) alors L(x)<0 ; U(x)> V(x) donc U(x)-V(x)>0
x+1-2x^2-x-1>0 donc -2x^2+2>0 ; -2(x-1)(x+1)>0 ; les racine du trinôme sont
-1 et 1 ; on aura -1<x<1.
si -1<x<1 alors U(x)>V(x) et L(x)<0</td><td>3</td></tr>
<tr><td>c) L(0)=$\int_{U(0)}^{V(0)}\sqrt{1+t^4}$ dt ; U(0)=1 et V(0)=-1 donc L(0)=$\int_1^{-1}\sqrt{1+t^4}$ dt
L(0)=$-\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^4}$ dt ; f est une fonction paire sur [-1 ; 1] car f (-t)=f(t) et
[-1 ; 1] est centré en 0 ; L(0)=$-\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^4}$ dt= -2$\int_0^1\sqrt{1+t^4}$ dt
($\int_{-a}^{a}f(t)dt=2\int_0^a f(t)dt$; f est continue et paire sur [-a ;a])
L(0)=-2$\int_0^1\sqrt{1+t^4}dt$; 0≤t≤1 alors 0≤t^4≤1 ; 1≤1+t^4≤2 ; $1\leq\sqrt{1+t^4}\leq\sqrt{2}$
Par intégration entre 0 et 1 on obtient :
$\int_0^1 1dt\leq\int_0^1\sqrt{1+t^4}dt\leq\int_0^1\sqrt{2}\,dt$; 1≤ $\int_0^1\sqrt{1+t^4}$ dt ≤ $\sqrt{2}$
-2$\sqrt{2}\leq-2\int_0^1\sqrt{1+t^4}dt\leq-2$ donc -2$\sqrt{2}$≤ L(0) ≤-2 ; L(0) ∈ $[-2\sqrt{2};-2]$</td><td>6</td></tr>
<tr><td>d) Soit (d) la tangente en A : y=L'(1) (x-1) +L(1) avec L(1)=0 ; A (1 ; 0)
$L'(x)=V'(x)\sqrt{1+V^4(x)}-U'(x)\sqrt{1+U^4(x)}$; on a U(1)=V(1)=2
V'(1)=5 et U'(1)=1 alors L'(1)= $4\sqrt{17}$. (d) : $y=4\sqrt{17}\,(x-1)$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1)
<table>
<tr><td>Classe C_i
Tailles</td><td>[150 ; 160]</td><td>[160 ; 170]</td><td>[170 ; 180]</td><td>[180 ; 190]</td></tr>
<tr><td>Effectifs
n_i</td><td>4</td><td>8</td><td>8</td><td>16</td></tr>
<tr><td>E.C.C</td><td>4</td><td>12</td><td>20</td><td>36</td></tr>
<tr><td>Centres
x_i</td><td>155</td><td>165</td><td>175</td><td>185</td></tr>
</table></td><td>2</td></tr>
</table>

	 2) $\frac{N}{2}=\frac{36}{2}=18$; la classe médiane est la première classe dont l'E.C.C dépasse $\frac{N}{2}$; [170 ; 180[est la classe médiane. S_1 la somme des aires des rectangles avant la droite (D). S_1= (4+8) (10) +8(m-170)=8m-1240 S_2 la somme des aires des rectangles après la droite (D). S_2= 16×10 +8(180-m)=-8m+1600 $S_1=S_2$ alors m=177,5. Interprétation : 50 % des élèves (18 élèves) ont des tailles inférieures ou égales à 177.5 et 50 % des élèves ont des tailles ≥ à 177,5.	**4**
	 3) A(170 ; 12) ; B (180 ; 20) et M (m ; 18). A ; B et M sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. $\overrightarrow{AB}$ (10 ; 8) ; $\overrightarrow{AM}$ (m-170 ; 6)	**4**

<table>
<tr><td></td><td>$\frac{X_{\overline{AB}}}{X_{\overline{AM}}}=\frac{Y_{\overline{AB}}}{Y_{\overline{AM}}}$ si et seulement si 8(m-170)=60 alors m=177,5</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>4) $\overline{x}=\frac{\sum n_i x_i}{N}=172{,}14$; la taille moyenne de la classe est 172,14
écart-type $=\sqrt{V}$=10,30 ; la taille moyenne est 172,14 avec une erreur de 10,30.</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>5)
P(X ≥170)= $\frac{C_{24}^{3}}{C_{36}^{3}}=\frac{2024}{7140}=0{,}28 \quad (28\%)$</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="5">5</td><td>1) a- Les valeurs possibles de X sont 0 ; 1 ; 2 et 3
<table>
<tr><td>$X=x_i$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$P_i=P(X=x_i)$</td><td>$\frac{C_5^3}{C_{15}^3}$</td><td>$\frac{C_{10}^1\times C_5^2}{C_{15}^3}$</td><td>$\frac{C_{10}^2\times C_5^1}{C_{15}^3}$</td><td>$\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}$</td></tr>
<tr><td>P_i</td><td>$\frac{2}{91}$</td><td>$\frac{20}{91}$</td><td>$\frac{45}{91}$</td><td>$\frac{24}{91}$</td></tr>
</table></td><td>4</td></tr>
<tr><td>b) E(x)=$\sum P_i\, x_i$=2 ; V(x)=$\sum P_i\times(x_i)^2-E(X)^2=\frac{52}{91}$; ƌ(x)=$\sqrt{V(X)}$=0,76
X est le nombre de billes rouges ; le nombre moyen de billes rouges est 2 avec une erreur de 0,76 ≈ 1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2) a-


P(R)=P($R\cap A$)+P(R∩B)=P(A)×P(R/A)+P(B)×P(R/B)= $\frac{8}{15}$
b- P(A/R)= $\frac{P(A\cap R)}{P(R)}=\frac{5}{8}$</td><td>4

4</td></tr>
<tr><td>3) a- P(2 billes rouges)=$\left(\frac{8}{15}\right)^2\times\left(\frac{7}{15}\right)^3\times C_5^2\approx$ 0,29</td><td>4</td></tr>
<tr><td>b- P (au moins deux billes rouges)=1-[P (0R) +P (1R)]
P (au moins deux billes rouges)=1-$\left(\frac{7}{15}\right)^5$-$C_5^1\left(\frac{8}{15}\right)\left(\frac{7}{15}\right)^4\approx$ 0,85</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Partie A</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>1) $\lim_{x\to+\infty}h(x)=-\infty$; $\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}2e^x-xe^x-2=-2$; alors la droite</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>d’équation y=-2 est une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>2) h’(x)= (1-x)e^x; h’(x)=0 pour x=1; h’(x)a même signe que 1-x
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ 0   1 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>h’(x)</td><td>+   0   −</td></tr>
<tr><td>h(x)</td><td>-2 ↗ 0 ↗ e-2 ↘ $-\infty$</td></tr>
</table></td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>3) L’équation de la tangente (t) à (C) en O (0;0) est de la forme
y=h’(0)(x-0)+h(0) ; h’(0)=1 alors (t): y=x</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>4) h(0)=0 donc 0 est une racine de l’équation h(x)=0; h est continue sur $[1;+\infty[$ car elle est derivable ; h change de signe sur $[1;+\infty[$ h(1)=e-2>0 et $\lim_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$; h est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$ d’après le tableau de variations de h donc h(x)=0 admet une seule racine α sur $[1;+\infty[$
h(1,5)=0,2408>0 et h(1,6)=-0,0187<0 donc h(1,6) <h(α) <h(1,5) alors
1,5<α<1,6</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>5) $\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x}=+\infty$ il y a une direction asymptotique verticale ; h(2)=-


2
D’après (C) on a :
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ 0   α $+\infty$</td></tr>
<tr><td>h(x)</td><td>−   0   +   0   −</td></tr>
</table></td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>6) S=$S_1 \times u^2$ avec $S_1=\int_0^1[(2-x)e^x-2]dx=[(3-x)e^x-2x]_0^1$=2e-5
Donc S=(2e-5) u^2</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Partie B</td><td></td></tr>
</table>

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\frac{e^x}{x} - 2) = +\infty$; g'(x)=e^x-2

g'(x)=0 pour x=ln2

x	$-\infty$		ln2		$+\infty$
g'(x)		$-$	0	+	
g(x)	$+\infty$	$\searrow$	2-2ln2	$\nearrow$	$+\infty$

g(ln2) ≈ 0,6 ; comme min(g(x)) est positif alors g(x)>0 pour tout x réel

donc g(x)≠0 pour tout réel x . $f(x) = \frac{e^x - 2}{g(x)}$ donc D_f = IR

4

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation y=0 est une A.H à $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1-2/e^x)}{e^x(-2x/e^x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-2/e^x}{1-2/(e^x/x)} = 1$$

La droite d'équation y=1 (A.H) au voisinage de $+\infty$

4

3) $f'(x) = \frac{-2xe^x + 4e^x - 4}{(e^x - 2x)^2} = \frac{2h(x)}{(e^x-2)^2}$ donc f'(x) et h(x) sont de même signe ; f'(x)=0 pour h(x)=0 ; x=0 ou x=α ; 1,5<α<1,6 ; f(0)=-1

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 2}{e^\alpha - 2\alpha}$$

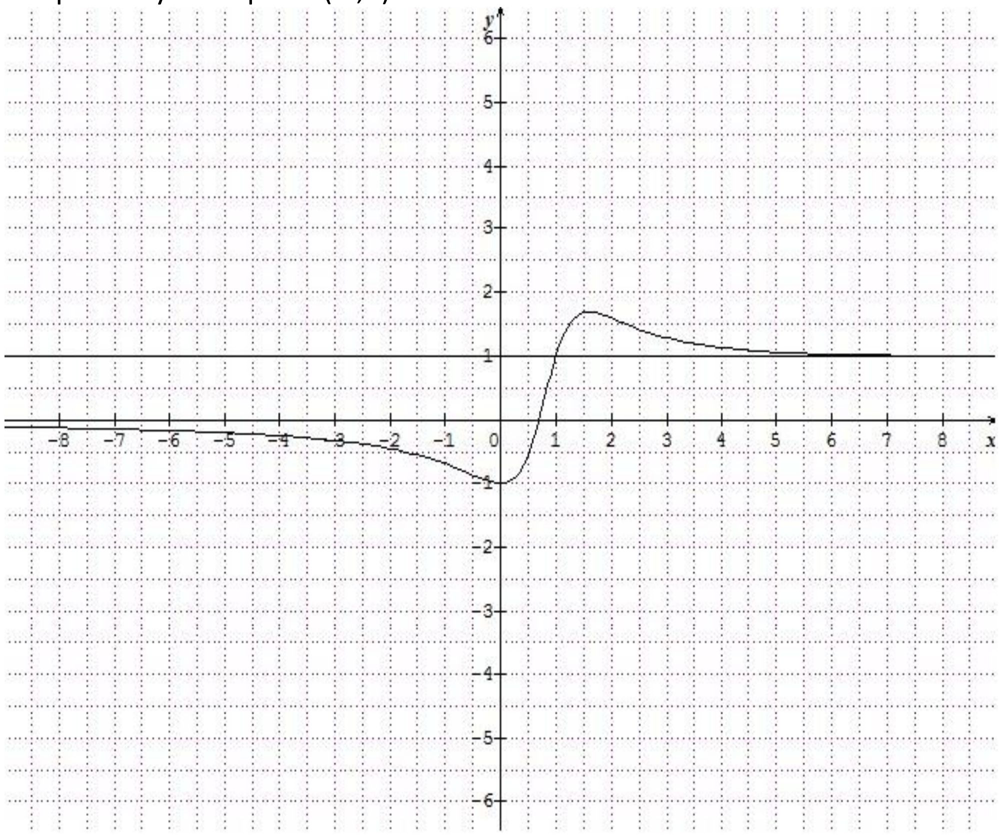
x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	f(α)	$\searrow$	1

4

4) h(α)=0 ; (2-α)e^α-2=0 alors $e^\alpha = \frac{2}{2-\alpha}$; $f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 2}{e^\alpha - 2\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$

Pour α=1,55 ; f(α)=1,82

4

	5) (T) $\cap$ x'ox ; f(x)=0 alors e^x-2=0 ; x=ln2 Donc (T) coupe x'ox en (ln2 ; 0) (T) $\cap$(y=1) ; f(x)=1 ; $\frac{e^x-2}{e^x-2x}=1$, 2x=2 alors x=1 donc (T) coupe la droite d'équation y=1 au point (1 ;1)  	4
	6) $S_n=S_1\times u^2$ avec $S_1=\int_1^n [f(x)-1]dx=\int_1^n (\frac{e^x-2}{e^x-2x}-1)dx$ $S_1=[\ln(e^x-2x)-x]_1^n$=ln(e^n-2n)-n-ln(e-2) +1=ln ($\frac{e^n-2n}{e^n}$) +1-ln(e-2) S_1=ln (1-2ne^{-n}) +1-ln(e-2) ; $\lim\limits_{n\to+\infty} s_1=1-\ln(e-2)=\ln(\frac{e}{e-2})$ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\ln(\frac{e}{e-2})u^2$	4
	Partie C	
	1) a) U(x)=ln (f(x)) ; U est définie pour f(x)>0 ; donc pour x>ln2 ; d'après la courbe (T) D_U=] ln2 ; + ∞[; $\lim\limits_{\substack{x\to\ln 2\\ x>\ln 2}} u(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\ln 2\\ x>\ln 2}} \ln(f(x))=-\infty$; f (ln2)=0 ; alors la droite d'équation x=ln2 est une A.V. $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(f(x))=0$; alors la droite d'équation y=0 est A.H	4

b) U'(x)= $\frac{f'(x)}{f(x)}$ avec f(x)>0 sur]ln2 ; $+\infty$[; U'(x) et f'(x) ont même signe sur]ln2 ;+∞[

x	ln2		α		$+\infty$
U'(x)		+	0	-	
U(x)	$-\infty$		ln (f(α))		0

4