Classe: $3^{ème}$ Année (SG) Année scolaire: 2010-2011

Matière: Math

Exercice 1 (20 pts)

1) a) Calculer les racines carrées du nombre complexe $5-12i$ (1 ½ pt)

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 -(1+4i)z-5+5i=0$ (1 ½ pt)

2) Soit l'équation (E) : $z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=0$

   a) Vérifier que -2i est une racine de l'équation (E). (1 ½ pt)

   b) Trouver deux nombres complexes **b** et **c** tels que : (1 ½ pt)

   $z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=(z+2i)(z^2+bz+c)=0$

   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). (1 ½ pt)

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o\,;\vec{u};\vec{v})$

   a)Placer les points A (2+i), B (-1+3i) et C (-2i). (1pt)

   b) Trouver la nature du triangle ABC. (2 pts)

   c) Soit D le point d'affixe z_D=-3 ; écrire sous la forme exponentielle le nombre complexe $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_B}$

   En déduire la nature du quadrilatère ABDC. (2 pts)

4) Soit $U=-7+24i$

   a)Vérifier que $2+i$ est une racine quatrième de U. (1 ½ pt)

   b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^4=-7+24i$ (1 ½ pt)

5) Soit le nombre complexe $W=\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)+i(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

   a) Calculer $\boldsymbol{W^2}$ et chercher sa forme exponentielle. (2 ½ pts)

   b) En déduire la forme exponentielle de $\boldsymbol{W}$ et la valeur exacte de $\tan(\frac{7\pi}{12})$

   (2 pts)

Exercice 2 (25 points).

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :f(x) = x + $\sqrt{x^2+4}$
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Montrer que les deux droites d'équations y= 0 et y = 2x sont asymptotes à (C) . (2 pts)
b) Etudier la position de (C) par rapport à ses asymptotes. (2 pts)

2) a) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Dresser son tableau de variations. (2pts)

b) Trouver l'équation de la tangente (T) à (C) au point A d'abscisse 0. (1pt)

c) Tracer (C) et (T). (2pts)

d) Montrer que f admet une fonction réciproque g .

Préciser son domaine de définition. ($1\frac{1}{2}$ pt)

e) trouver la forme explicite $y = g(x)$ ($1\frac{1}{2}$ pt)

f) Tracer (C') (la courbe représentative de g). (1 pt)

g) Calculer g'(2). ($1\frac{1}{2}$ pt)

h) Pour tout réel non nul x_0, on désigne par M et M' les points de (C) d'abscisses respectives x_0 et - x_0. (2 pts)

Montrer que f (x_0) - f(-x_0) = 2x_0 et que la droite (MM') garde une signe fixe.

3) Soit (H) la courbe d'équation : y^2- 2xy - 4 = 0

a) Montrer que (H) est la réunion de la courbe (C) et d'une courbe (C'') dont on déterminera l'équation.

($1\frac{1}{2}$ Pt)

b) Montrer que (C'') est symétrique de (C) par rapport à l'origine. Tracer (C''). (2pts)

4) Soit (d) la droite d'équation y = x + m où m est un paramètre réel.

Montrer que lorsque (d) coupe (C) en deux points N_1 et N_2 alors les abscisses de N_1 et N_2 sont opposées et que les tangentes en N_1 et N_2 à (C) se coupent en un point situé sur l'axe y'y. (2pts)

5) Soit u et v deux fonctions définies par:

u(x)=f(x) - x= $\sqrt{x^2+4}$ $\quad v(x) = \dfrac{2x+3}{x-3}$ et w= $v \circ u$

Sans trouver l'expression de w(x) en fonction de x.

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction w. ($1\frac{1}{2}$ pt)

b) Calculer w'(0). ($1\frac{1}{2}$ pt)

Exercice 3 (5 points)

Dans un triangle ABC, on donne AB=$1+\sqrt{3}$; AC=$\sqrt{6}$ et $\hat{A}$ = 45°

1) Calculer BC et les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$. (2 pts)
2) Calculer le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, ainsi que l'aire de ce triangle. (2 pts)

   Calculer la mesure de la hauteur [AH] relative à [BC] (1point)