Dans toutes les questions suivantes, le système est orthonormal sauf il est énoncé.

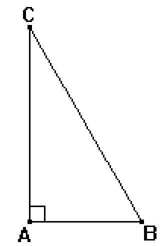
I- (2 points)

Parmi les réponses proposées à chaque question, une seule est juste. Écrire le nombre de chaque question et donner, **avec justification**, sa réponse correspondante.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Questions</th><th colspan="3">Réponses proposées</th></tr>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th></tr>
<tr><td>1)</td><td>Une solution de l'équation différentielle (E): $y'' + 3y' - 4y = 0$ est</td><td>$e^{-x} + 2e^{4x}$</td><td>e^{4x}</td><td>e^{-4x}</td></tr>
<tr><td>2)</td><td>La négation de $p \Rightarrow q$ est</td><td>$\neg p \Leftarrow \neg q$</td><td>$p \wedge (\neg q)$</td><td>$p \vee (\neg q)$</td></tr>
<tr><td>3)</td><td>Soit $x > 0$. $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} =$</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td>0</td><td>$-\frac{\pi}{2}$</td></tr>
<tr><td>4)</td><td>$\int \frac{1}{x^2+4}dx =$</td><td>arctan(x)</td><td>$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$</td><td>$\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td>5)</td><td>f est une fonction définie par : $f(x) = e^{2x}$. $f^{(n)}(0) =$</td><td>2^{n-1}</td><td>2^{n}</td><td>2^{n+1}</td></tr>
<tr><td>6)</td><td>f est une fonction continue, dérivable et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. La suite $I_n = \int_{n}^{n+1} f(x)dx$, où $n \in N^*$, est</td><td>Croissante</td><td>Décroissante</td><td>Aucune</td></tr>
<tr><td>7)</td><td>f est une fonction continue, dérivable et positive sur $\mathbb{R}$. La suite $I_n = \int_{0}^{n} f(x)dx$, où $n \in N^*$, est</td><td>Croissante</td><td>Décroissante</td><td>Aucune</td></tr>
<tr><td>8)</td><td>On considère les données suivantes :
<table><tr><th>Variable</th><th>[10 – 15[</th><th>[15 – 20[</th><th>[20 – 25]</th></tr><tr><th>Effectifs</th><td>7</td><td>3</td><td>10</td></tr></table>L'écart type est à-peu-près</td><td>3,1</td><td>18,25</td><td>Aucune</td></tr>
</table>

II- (3 points)

Dans un plan orienté, on considère un triangle rectangle direct ABC en A, tels que AB = 2cm et $\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$. S est la similitude plan directe qui transforme A en B et B en C.



1) Déterminer le rapport et l'angle de S.
2) Soit O le milieu de [AB]. On considère le système orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$.
   - **a-** Trouver la forme complexe de la similitude S.
   - **b-** Déterminer l'affixe du point W, le centre de S.
3) E et F sont deux points de (AB) tels que $\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{FB} = -2\overrightarrow{FA}$.
   - **a-** Calculer $\overrightarrow{WE}$ et $\overrightarrow{WF}$ en fonction de $\overrightarrow{WA}$ et $\overrightarrow{WB}$.
   - **b-** Montrer que W décrit un cercle de diamètre [EF].
   - **c-** Calculer WA, puis en déduire la position de W.
   - **d-** Préciser, géométriquement, la position de W.
4) Soit H la projection orthogonal de A à (BC). On considère l'homothétie h de centre H qui transforme B en C.
   - **a-** Trouver l'image de A par h.
   - **b-** Trouver le rapport et l'angle de la similitude h o S.

III- (2 points)

Rami achète 1000 LL un billet permettant de participer à un jeu constitue d'un grattage suivi d'une loterie. Il gratte une case sur le billet.

Il peut alors gagne 10000 LL avec une probabilité de 0,02 ou bien ne rien gagner.

Il participe ensuite à une loterie avec le même billet. À cette loterie, il peut gagner 10000 LL, 20000 LL ou bien ne rien gagner.

Si Rami n'a rien gagné au grattage, la probabilité qu'il gagne 10000 LL à la loterie est $\frac{1}{70}$ et la probabilité qu'il gagne 20000 LL à la loterie est $\frac{1}{490}$.

On considère les événements suivant :

G: "Rami gagne au grattage"

$\mathbf{L_0}$: "Rami ne gagne rien à la loterie"

$\mathbf{L_1}$: "Rami gagne 10000 LL à la loterie"

$\mathbf{L_2}$: "Rami gagne 20000 LL à la loterie"

1) Calculer la probabilité pour que Rami ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il n'a rien gagné au grattage.
2) On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique total du Rami, après grattage et loterie. On sait que P(X = 9000 LL) = 0,016 et de P(X = 19000 LL) = 0,004.
   - **a-** Démontrer que la probabilité que Rami gagne 10000 LL à la loterie, sachant qu'il a gagné 10000 LL au grattage, est égale à 0,1.
   - **b-** Déterminer la loi de probabilité d X, puis calculer E(X).
   - **c-** Calculer la probabilité que Rami ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il a gagné 10000 LL au grattage.

IV- (3 points)

L’espace est muni d’un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère le point A(–1 , 1 , 0), le plan (P) d’équation: x – 2y + 2z – 6 = 0, et la droite (D): $\begin{cases} x = m+1 \\ y = 2m+1 \\ z = 3m+2 \end{cases}$ ($m \in \mathbb{R}$).

1) Montrer que A et (D) détermine un plane (Q) et déterminer une équation de (Q).

2)

a- Montre que (P) coupe (Q) dans un droite (Δ) définie par : x = 2 ; y = t – 2 ; z = t.

b- Montrer que les coordonnées de A′, la projection orthogonal de A en (Δ), sont $\left(2\,,\,-\frac{1}{2}\,,\,\frac{3}{2}\right)$.

3) M est un point variable de (Δ). α est une mesure de l’angle formée par (AM) et (P).

a- Trouver les coordonnées de H, la projection orthogonal projection de A en (P).

b- Calculer la distance de A en (P), puis montrer que AM × sinα = 3.

c- Déterminer la position de M pour que α est maximum. Calculer sinα dans ce cas.

d- Que représente ce valeur de α par rapport au planes (P) et (Q)?

4) On considère le cercle (C) de centre A qui est tangente à (Δ) et contenant dans le plane (Q). La projection orthogonale de (C) au plan (P) est un ellipse (E).

a- Calculer le rayon de (C).

b- Déterminer les coordonnées du centre de (E).

c- Calculer l’excentricité de (E).

d- Déterminer un system d’équations paramétriques de l’axe focal de (E).

V- (3 points)

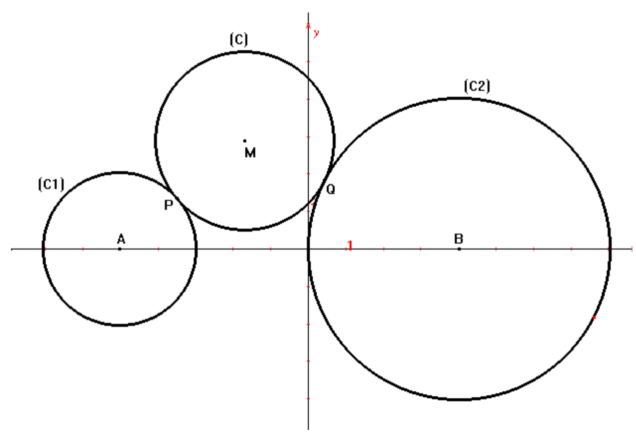
Dans la figure ci-contre, on a les cercles :

(C_1) de centre A(– 5 ; 0) et rayon R_1 = 2;

(C_2) de centre B(4 ; 0) et rayon R_2 = 4;

(C) de centre M et rayon R qui est tangent extérieurement à cercles (C_1) and (C_2) aux points P et Q.

On considère les points C(–14 ; 0) et D(–2 ; 0).



1) S est la similitude d’angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme (C_1) à (C_2).

a- Calculer le rapport de S.

b- Soit I le centre de S. Utiliser l’égalité $\left(\overrightarrow{IB}\right)^2 = 4\left(\overrightarrow{IA}\right)^2$ pout démontrer que $\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{ID} = 0$, puis construire, géométriquement, le point I.

2) Montrer que M décrit une hyperbole (H) dont on déterminera l’équation et l’excentricité.

3) On considère les deux homothéties h et h' tells que h(C_1) = (C) et h'(C) = (C_2). Montrer que h′ o h est une homothétie dont on déterminera ses éléments.

VI- (7 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^{x})$. (C) est la courbe représentative de f dans un système orthogonal $(O ; \vec{i} , \vec{j})$. (Unités graphiques: 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées).

1)

- **a-** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
- **b-** Vérifier que $f(x) = \dfrac{x}{e^{x}} + e^{-x}\ln\left(1+e^{-x}\right)$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- **c-** En déduire que la courbe (C) admet deux asymptotes que l'on précisera.

2) On considère la fonction g définie sur $]-1 , +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$.

- **a-** Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur $]0 , +\infty[$.
- **b-** En déduire le signe de g(x) lorsque $x > 0$.

3)

- **a-** Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(e^{x})$.
- **b-** Dresser le tableau de variations de f.

4) Tracer (C).

Partie B

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1) Etudier le sens de variations de la fonction F.

2)

- **a-** Vérifier que $\dfrac{1}{1+e^{t}} = 1 - \dfrac{e^{t}}{1+e^{t}}$ et déterminer $\int_0^x \dfrac{dt}{1+e^{t}}$.
- **b-** En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, F(x).
- **c-** Vérifier que $F(x) = x - \ln(1 + e^{x}) - f(x) + 2\ln 2$ et que $F(x) = \ln\left(\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}\right) - f(x) + 2\ln 2$.

3) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

4) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(F(x) - x\right)$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Partie C

Soit (U_n) la suite définie sur **N*** par : $U_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

1) Hachurer sur la représentation graphique un domaine dont l'aire, en unités d'aire, est U_4.

2) Déterminer le sens de variation de la suite (U_n).

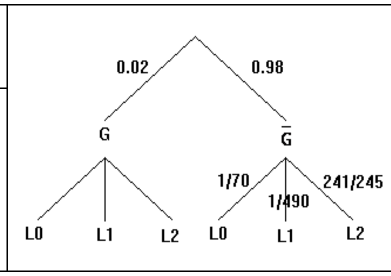
3) Montrer que $f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(t)dt$, où $1 \le k \le n$, puis comparer U_n et F(n).

4) La suite (U_n) est-elle convergent ? Justifier votre réponse.

Barèmes

Question I								Note
1)	**C**	**2)**	**B**	**3)**	**A**	**4)**	**B**	**0,5** chacune
5)	**B**	**6)**	**B**	**7)**	**A**	**8)**	**C**	

Question II			Note
1)		$k = 2;\ \theta = \frac{2\pi}{3}$	**0,25** **0,25**
2)	**a-**	$z' = \left(-1+i\sqrt{3}\right)z + i\sqrt{3}$	**0,75**
	b-	$z_W = -\frac{3}{7} + \frac{2\sqrt{3}}{7}i$	**0,25**
3)	**a-**	$\overrightarrow{WE} = 2\overrightarrow{WA} - \overrightarrow{WB}$ et $\overrightarrow{WF} = \frac{2\overrightarrow{WA} + \overrightarrow{WB}}{3}$	**0,5** **0,5**
	b-	$\overrightarrow{WE} \cdot \overrightarrow{WF} = 0$; W décrit un cercle (C_1) de diamètre [EF]	**0,75**
	c-	$WA = \frac{2\sqrt{7}}{7}$; W décrit un cercle (C_2) de centre A et de raton $\frac{2\sqrt{7}}{7}$	**0,5** **0,5**
	d-	$\{W\} = (C_1) \cap (C_2)$	**0,25**
4)	**a-**	h(B) = C et h(A) = A′; (A′C) / / (AB); A′ se déplace sur la droite passant par C et parallèle à (AB). En plus, h(A) = A′; H, A, A′ sont alignes; A′ se déplace sur (HA). A′ est le point commun entre les deux droites	**0,75**
	b-	ABC rectangle et [AH] hauteur; AB × AC = AH × BC; AH = $\sqrt{3}$. AHB rectangle; HB = 1. HC = BC – BH = 3. Rapport de h = $\frac{HC}{HB}$ = 3. h o $S\left(?\ ,\ 2\times 3\ ,\ \frac{2\pi}{3}\right)$; h o $S\left(?\ ,\ 6\ ,\ \frac{2\pi}{3}\right)$	**0,75**

Question III				Note
1)		$P\left(L_0 / \overline{G}\right) = \frac{241}{245}$.		**0,5**
2)	**a-**	$P(L_1) = P(L_1 \cap G) + P\left(L_1 \cap \overline{G}\right)$; $P(L_1) = P(L_1 / G) \times P(G) + P\left(L_1 / \overline{G}\right) \times P\left(\overline{G}\right)$; $0{,}016 = P(L_1 / G) \times 0{,}02 + \frac{1}{70} \times 0{,}98$; $P(L_1 / G) = 0.1$		**1,5**
	b-	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} \mathbf{X = X_i} & \mathbf{-1000} & \mathbf{9000} & \mathbf{19000} & \mathbf{T} \\ \hline \mathbf{P(X = X_i)} & 0{,}98 & 0{,}016 & 0{,}004 & 1 \end{array}$		**0,5**
	c-	$P(L_0) = 1 - (P(L_1) + P(L_2)) = 0{,}98$; $P(L_0) = P(L_0 \cap G) + P\left(L_0 \cap \overline{G}\right)$; $0{,}98 = P(L_0 / G) \times 0{,}02 + \frac{241}{245} \times 0{,}98$; $P(L_0 / G) = 0{,}8$.		**1,5**

Question IV			Note
1)		A ∉ (D); A et (D) détermine un plan (Q). B(1 , 1 , 2) ∈ (D); $\overrightarrow{AM}\,.\,\left(\overrightarrow{AB}\times\vec{u}_D\right)=0$; (Q): x + y – z = 0.	0,5
2)	a-	(Δ) ⊂ (P) et (Δ) ⊂ (Q).	0,5
	b-	A′(2 , t – 2 , t) ∈ (Δ); A′ projection orthogonal de A à (Δ), alors $\overrightarrow{AA'}\,.\,\vec{u}_\Delta=0$; t = $\frac{3}{2}$; A′$\left(2\,,-\frac{1}{2}\,,\frac{3}{2}\right)$.	0,5
3)	a-	H(0 , –1 , 2).	0,75
	b-	d(A , (P)) = 3. L'angle est $\widehat{AMH}$; $\sin\alpha=\frac{HA}{AM}=\frac{d(A,(P))}{AM}=\frac{3}{AM}$; AM × sinα = 3.	0,25 0,5
	c-	α max.; AM min.; M ≡ A′; M est la projection orthogonal de A à (Δ). $\sin\alpha=\frac{HA}{AM}=\frac{3}{AA'}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.	0,5
	d-	(AH) ⊥ (P), (AH) ⊥ (Δ); (AA′) ⊥ (Δ),alors (Δ) ⊥ (A′H); α est l'angle dièdre du deux plans (P) et (Q)	0,5
4)	a-	Rayon = r = AA′ = $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.	0,25
	b-	Le centre de (E) est la projection orthogonal de A à (P); centre est H(0 , –1 , 2).	0,75
	c-	a = r = $\frac{3\sqrt{6}}{2}$; b = rcosα; $c^2=a^2-b^2=r^2\sin^2\alpha$; c = 3; e = $\frac{\sqrt{6}}{3}$.	0,5
	d-	(F.A.) // (Δ) et passe par H, le centre de (E); (A.F.): x = 0, y = k – 1, z = k + 2.	0,5

Question V			Note
1)	a-	$S(C_1)=(C_2)$; rapport = $\frac{R_2}{R_1}$ = 2.	0,5
	b-	$\left(\overrightarrow{IB}\right)^2-4\left(\overrightarrow{IA}\right)^2=0$; $\left(\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IA}\right)=0$; $-3\overrightarrow{IC}\,.\,\overrightarrow{ID}=0$; $\overrightarrow{IC}\,.\,\overrightarrow{ID}$ = 0. I décrit le cercle de diamètre [CD]; S(A) = B; I décrit le demi-cercle de diamètre [AB] privée que A et B; I est le point commun de deux ensembles.	1 0,5 0,5
2)		MB – MA = MQ + QB – (MP + PA) = 2 = constante = 2a; M décrit une hyperbole de foyers A et B. 2a = 2; a = 1. 2c = AB = 9; c = 4,5. b^2 = 84 / 4. e = 4,5. Centre est le milieu de [AB]; centre (–0,5 , 0). (H): $\frac{(x+0,5)^2}{1}-\frac{y^2}{\frac{85}{4}}=1$.	0,5 1,5
3)		h est une homothétie de rapport k_1 = $\frac{R}{R_1}=\frac{R}{2}$; h′ est une homothétie de rapport k_2 = $\frac{R_2}{R}=\frac{4}{R}$; h′ o h est une homothétie de rapport k_1k_2 = 2 (≠ 1). h′ o h(C_1) = h′(C) = (C_2); h′ o h(A) = B; le centre J de h′ o h est tel que $\overrightarrow{JB}=2\overrightarrow{JA}$ ou J ≡ C; h′ o h = H(C , 2).	1,5

Question VI			Note
Partie A			
1)	**a-**	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$	**0,5**
	b-	f(x) = $\frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln\left(1+e^{-x}\right)$ (facile). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$	**0,5** **0,5**
	c-	y = 1 A.H. and y = 0 A.H.	**0,5**
2)	**a-**	$g'(x) = -\frac{x}{(1+x)^2} < 0$; g est strictement décroissante	**0,5**
	b-	g(0) = 0 et g est strictement décroissante; g(x) < 0	**0,5**
3)	**a-**	$f'(x) = \frac{1}{e^x}g\left(e^x\right)$	**0,5**
	b-	Facile	**0,5**
4)	Courbe		**1**
Partie B			
1)	$F'(x) = f(x) > 0$; F est strictement croissante		**0,5**
2)	**a-**	$1-\frac{e^t}{1+e^t} = \frac{1}{1+e^t}$; $\int_0^x \frac{dt}{1+e^t} = \int_0^x\left(1-\frac{e^t}{1+e^t}\right)dt = \left[t-\ln\left(1+e^t\right)\right]_0^x = x - \ln(1 + e^x) + \ln 2$	**0,25** **1**
	b-	$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(e^{-t}\ln\left(1+e^t\right)\right)dt = x - \ln(1 + e^x) - e^{-x}\ln(1 + e^x) + 2\ln 2$ ***(u = ln(1 + e^t) et dv = e^{-t}dx)***	**1**
	c-	$F(x) = x - \ln(1 + e^x) - f(x) + 2\ln 2$ and $F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2$ (facile)	**0,25** **0,25**
3)	$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 2\ln 2$		**0,5**
4)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(F(x)-x\right) = -1+2\ln 2$; $y = x - 1 + 2\ln 2$ est une asymptote oblique à la courbe de F		**0,5** **0,25**
Partie C			
1)	Facile		**0,5**
2)	$U_{n+1} - U_n = \ldots = f(n + 1) > 0$; (U_n) est strictement croissante		**1**
3)	$k - 1 \le t \le k$ et f est décroissante; $f(t) \ge f(k)$; $f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(t)dt$ $U_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \le \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt + \ldots + \int_{n-1}^n f(t)dt = \int_0^n f(t)dt = F(n)$; $F(n) \ge U_n$		**1** **1**
4)	$U_n \le F(n) = 2\ln 2$; (U_n) est une suite croissante majorée par $2\ln 2$; (U_n) est convergente.		**1**