I- (2 points)

Remarque: Les parties de cette question sont indépendants.

1) Résoudre l'équation différentielle (E): $yy'' - 2y'^2 - y^2 = 0$ $\left(\text{Let } z = \dfrac{1}{y}\right)$.

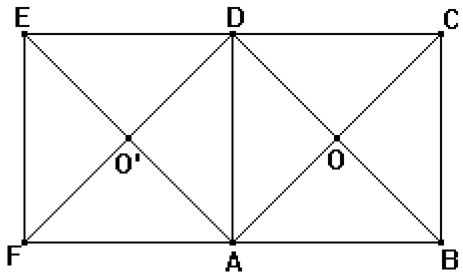
2) Trouver m pour que le courbe (C) d'équation: $\dfrac{x^2}{m+1} + \dfrac{y^2}{2m-7} = 1$ est une hyperbole rectangulaire.

3) g est une fonction définie par: $g(x) = e^x + x^2$. Peut-on trouver une fonction f, distinct que g, tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$? Justifier votre réponse.

4) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^4 + 4x^2 + 5}\,dx$.

II- (3 points)

Dans la figure ci-contre, ABCD et ADEF sont deux carrés directs identiques. On considère:



- La rotation r de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
- La translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- L'homothétie h de centre C et de rapport $\sqrt{3}$.

Soient f = t o r et g = t o r o h.

1) Préciser l'image du carré ABCD par f.
2) Montrer que f est une rotation.
3) Montrer que le point O est invariant par f.
4) Montrer que g est une similitude dont on déterminera l'angle et le rapport.
5) Soit L le centre de g. Montrer que le triangle LDC est demi-équilatérale et déduire une construction géométrique de L.
6) Le plan complexe est rapporte à un système orthonormal $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
   - **a-** Ecrire la forme complexe de la similitude S qui transforme A en B et O en E.
   - **b-** Préciser S(C).

III- (2 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère le point A(1 , 1 , 1) et les deux droites (D): $\begin{cases} x = t-1 \\ y = 2t+1 \\ z = -2t \end{cases}$ et (D'): $\begin{cases} x = 2m \\ y = -2m+3 \\ z = m-1 \end{cases}$ (t et m sont deux réels).

1) Montrer que A n'appartient pas à (D) et que (D') ne passe pas par A.

2) Ecrire une équation cartésien du plane qui passe par A et parallèle à (D) et (D').

3)

- **a-** Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (L) qui passe par A et parallèle à (D).
- **b-** W Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (L') qui passe par A et parallèle à (D').
- **c-** Ecrire un système d'équations paramétriques de la bissectrice de l'angle formée par (L) et (L').

4) Calculer le cosinus de l'angle obtus formée par (D) et (D').

5) Calculer la tangente de l'angle aigu formée par (D') et plane (xOy).

IV- (3 points)

Partie A

Une urne contient n boules rouges, 2n boules vertes et 5 boules jaunes, où n est un entier naturel plus grand que 1. Deux boules sont tirées successivement sans remise dans cette urne. Soit P(n) la probabilité que les boules tirées ont les mêmes couleurs.

1) Vérifier que p(n) = $\dfrac{5n^2-3n+20}{(3n+5)(3n+4)}$.

2) Trouver le nombre de boules p(n) = $\dfrac{4}{13}$.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que **n = 3**. A joueur choisie au hasard deux boules simultanément dans cette urne. Si la boule tirée est rouge, il gagne 5 points; si la boule tirée est verte, il gagne 3 points; si la boule tirée est jaune, il perde 4 points. Soit X la variable aléatoire qui désigne la somme des points gagnée par le joueur (X peut-être négatif).

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Calculer E(X).

Partie C

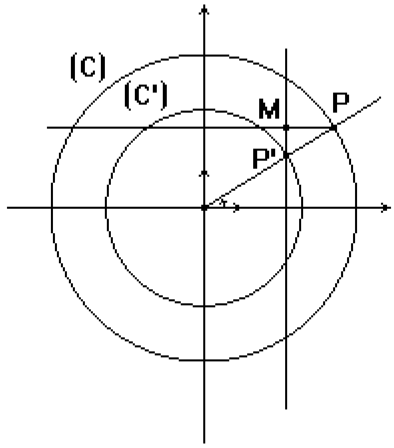
Dans cette partie, on suppose que **n = 4**. Trois boules sont tirées successivement avec remise dans cette urne. On désigne par Y la variable aléatoire qui est égale à le nombre des boules rouges tirées. Calculer P(Y = 2).

V- (3 points)

Le plan est rapport d'un système orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

(C) est un cercle de centre O et rayon $\sqrt{6}$ et (C') est un cercle de centre O et rayon $\sqrt{2}$. P est un point de (C) tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OP}) = \theta\ (2\pi)$. Le segment [OP] coupe (C') en P'. Le parallèle mené de P à l'axe des abscisses et le parallèle mené de P′ à l'axe des ordonnées se coupe en M.



1) Montrer que les coordonnées de M sont $\left(\sqrt{2}\cos\theta\ ; \sqrt{6}\sin\theta\right)$.
2) Montrer que, lorsque θ varie sur l'intervalle]-π , π], l'ensemble des points M est un ellipse.

Partie B

Soit (E) l'ellipse d'équation $3x^2 + y^2 = 6$.

1)
   - **a-** Tracer (E) et le cercle (C). (Unités : 2cm)
   - **b-** Déterminer l'excentricité, un foyer et la directrice associe de (E).

2)
   - **a-** Vérifier que les points $I\left(1, \sqrt{3}\right)$ et $J\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ appartiennent à (E).
   - **b-** Déterminer les équations des tangentes (T) et (T') à (E) en I et J respectivement.
   - **c-** Déterminer les coordonnées du point L, l'intersection de (T) et (T').
   - **d-** Soit S le milieu de [IJ]. Montrer que (LS) passe par le centre de (E).

Partie C

L'objective de cette partie est déterminer la nature de la courbe (Γ) d'équation $x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$.

1)
   - **a-** Montrer que (Γ) est l'image de (E) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   - **b-** En déduire que (Γ) est un ellipse dont on déterminera le centre, les axes et l'excentricité. Tracer (Γ).

2)
   - **a-** Montrer que (Γ) et (E) ont le même cercle auxiliaire (C).
   - **b-** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limite par (C) et (Γ).

VI- (7 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + e^{-x} - 2e^{-2x}$. (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et an $-\infty$.
2) Déterminer $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.
3) Soit (D) la droite d'équation y = 1
   - **a-** Montrer que (C) et (D) ont un point d'intersection A dont on déterminera les coordonnées.
   - **b-** Etudier la position relative de (C) et (D).
   - **c-** Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A.
4) Tracer (T), (D) et (C).

Partie B

1) Calculer l'aire du domaine limité par (C), l'axe des ordonnées et (D).
2) On considère la suite (U_n) définie sur **N*** par : $U_n = \int_{(n-1)+\ln 2}^{n+\ln 2} \left(f(x)-1\right) dx$.
   - **a-** Montrer que $U_n > 0$.
   - **b-** Donner une interprétation graphique de U_n.
3)
   - **a-** En utilisant le sens de variations de f, montrer que, pout tout $n \geq 2$:
     $f(n + \ln 2) - 1 \leq f(x) - 1 \leq f((n-1) + \ln 2) - 1$ si $x \in [(n-1) + \ln 2 \,;\, n + \ln 2]$.
   - **b-** En déduire que, pout tout $n \geq 2$: $f(n + \ln 2) - 1 \leq U_n \leq f((n-1) + \ln 2) - 1$.
   - **c-** Démontrer que la suite (U_n) est décroissante.
   - **d-** Montrer que la suite (U_n) est convergente.
4) On considère la suite (S_n) définie par : $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$, où $n > 0$.
   Ecrire S_n à laide d'une intégrale.

Barèmes

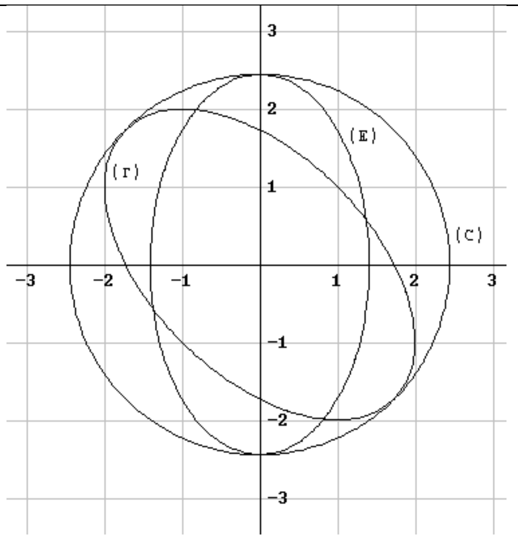
	Question I	Note
1)	$y = \dfrac{1}{C_1 \cos x + C_2 \sin x}$.	**1**
2)	$m + 1 = -(2m - 7)$; $m = 2$.	**1**
3)	Oui; $f(x) = e^x$.	**1**
4)	$\frac{1}{2}\arctan 3 - \frac{1}{2}\arctan 2$.	**1**

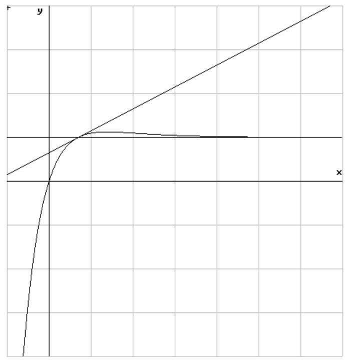
		Question II	Note
1)		L’image est le carré BCDA.	**1**
2)		La composition d’une translation et d’une rotation est une rotation.	**0,5**
3)		$t \circ r(O) = t(O') = O$.	**0,5**
4)		$g = t \circ r \circ h = f \circ h$, alors g est une similitude car elle est la composition d’une homothétie et une rotation; angle = $\frac{\pi}{2}$ et rapport = $\sqrt{3}$.	**1**
5)		$g(C) = D$, alors $\left(\overrightarrow{LC}, \overrightarrow{LD}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $LD = \sqrt{3}\,LC$, alors LDC demi équilatérale et L est le troisième sommet du triangle direct demi-équilatérale LDC.	**1**
6)	**a-**	$z' = (-1 + 3i)z + 1$	**1**
	b-	$S(C) = C'$, où $C'(-3 , 2)$	**1**

	Question III			Note
1)	Facile.			**0,25** **0,25**
2)	$x + y + 3z - 4 = 0$.			**0,5**
3)	**a-** (L): $\begin{cases} x = k + 1 \\ y = 2k + 1 \\ z = -2k + 1 \end{cases}$	**b-** (L'): $\begin{cases} x = 2a + 1 \\ y = -2a + 1 \\ z = a + 1 \end{cases}$	**c-** (d): $\begin{cases} x = 3b + 1 \\ y = 1 \\ z = -b + 1 \end{cases}$	**0,5** **0,5** **1**
4)	Cosinus est $-\frac{2}{9}$.			**0,5**
5)	Sinus est $\frac{1}{3}$, alors tangent est $\frac{\sqrt{2}}{4}$			**0,5**

Question IV		Note
Partie A		
1)	$p(n) = \dfrac{5n^2 - 3n + 20}{(3n+5)(3n+4)}$.	**1**
2)	n = 3	**0,5**
Partie B		
1)	(see table below)	**3**
2)	$E(X) = \dfrac{169}{91}$	**0,5**
Partie C		
$P(Y = 2) = \dfrac{624}{4913}$		**1**

$X = x_i$	-8	-1	1	6	8	10	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{91}$	$\frac{30}{91}$	$\frac{15}{91}$	$\frac{15}{91}$	$\frac{18}{91}$	$\frac{3}{91}$	1

Question V			Note
Partie A			
1)		$M\left(\sqrt{2}\cos\theta\ ;\sqrt{6}\sin\theta\right)$	**0,5**
2)		$\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{6} = 1$	**0,5**
Partie B			
1)	**a-**		**0,5** **0,25**
	b-	$e = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$; F(0 , 2); (d): x = 3	**0,5**
2)	**a-**	Facile	**0,5**
	b-	(T): $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$; (T'): $x = x_J = -\sqrt{2}$.	**0,5**
	c-	$L\left(-\sqrt{2}, \sqrt{6} + 2\sqrt{3}\right)$	**0,25**
	d-	(LS): $y = \left(-\sqrt{3} - \sqrt{6}\right)x$	**0,5**
Partie C			
1)	**a-**	R(E) = (Γ)	**0,75**
	b-	Rotation conserve figures géométriques; centre O; $e = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$; A.F.: y = –x	**0,5**
2)	**a-**	Les deux cercles auxiliaires ont le même centre et rayon	**0,5**
	b-	$\pi a^2 - \pi ab = (6\pi - 2\sqrt{3}\pi)u^2$	**0,25**

Question VI			Note
Partie A			
1)		1 et $-\infty$	**0,25** **0,5**
2)		$f'(x) = 4e^{-2x} - e^{-x}$; Facile.	**0,5** **1,5**
3)	**a-**	$A(\ln 2 , 1)$	**0,5**
	b-	$x < \ln 2$: (C) au dessous de (D); $x > \ln 2$: (C) au dessus de (D); $x = \ln 2$: (C) coupe (D)	**1**
	c-	(T): $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln 2 + 1$.	**0,75**
4) (1,5 pts)			
Partie B			
1)		Aire = $0,5\ u^2$	**1**
2)	**a-**	Pour $x \in [(n-1) + \ln 2 ; n + \ln 2]$, $f(x) - 1 > 0$, alors $U_n > 0$	**1**
	b-	U_n est l'aire du domaine limité par (C), (D), $x = n - 1 + \ln 2$ et $x = n + \ln 2$.	**0,5**
3)	**a-**	Sur $[(n-1) + \ln 2 ; n + \ln 2]$; f est décroissante, $f(n + \ln 2) \le f(x) \le f((n-1) + \ln 2)$, $f(n + \ln 2) - 1 \le f(x) - 1 \le f((n-1) + \ln 2) - 1$.	**1**
	b-	Intégrale	**1**
	c-	$U_{n+1} \le U_n$	**1**
	d-	(U_n) est décroissante et minorée (> 0), alors (U_n) est convergente.	**1**
4)		$S_n = \int_{\ln 2}^{n+\ln 2} (f(x) - 1)dx$.	**1**