I- (2 points)

Parmi les réponses proposées à chaque question, une seule est juste. Écrire le nombre de chaque question et donner, **avec justification**, sa réponse correspondante.

Questions		Réponses proposées		
		A	**B**	**C**
1)	BC = 8cm et $\hat{A}$ = 30°. Le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC est	2 cm	4 cm	8 cm
2)	Si $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, alors $f'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
3)	$\int_{-1}^{1}(e^{x^2}+\sin^7 \pi x)dx =$	$2\int_{-1}^{1} e^{x^2}dx$	$2\int_{1}^{0} e^{x^2}dx$	$2\int_{0}^{1} e^{x^2}dx$
4)	$\int_{0}^{2}\frac{8dx}{x^2+4} =$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$

II- (3 points)

Dans un plan rapport à un système orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les deux droites (d_1) et (d_2) d'équations paramétriques: (d_1): $\begin{cases} x = t-2 \\ y = 2t+1 \\ z = -2t+2 \end{cases}$ et (d_2): $\begin{cases} x = -2m \\ y = -4m+1 \\ z = 4m \end{cases}$ où t et m deux nombres réels.

1)

- **a-** Justifier que (d_1) et (d_2) sont parallèles.
- **b-** (P) est le plan détermine par (d_1) et (d_2). Montrer que 2x + y + 2z – 1 = 0 est une équation cartésien de (P).

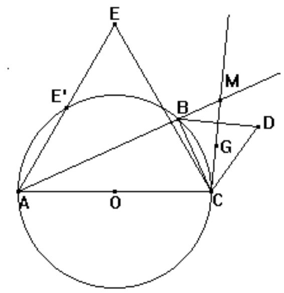
2)

- **a-** Ecrire un système d'équations paramétriques de droite (d) de (P) qui est équidistant de (d_1) et (d_2).
- **b-** Vérifier que 2x – 2y – z + 5 = 0 est une équation du plan (Q) qui est perpendiculaire à (P) et contenant (d).

3)

- **a-** E est une point de (Q) et appartienne à $(O;\vec{k})$. Vérifier que E a pour coordonnées (0 , 0 , 5).
- **b-** Soit M un point variable sur (d_1). Vérifier que $EM^2 = 9t^2 + 12t + 14$.
- **c-** Déterminer les coordonnées du point H, la projection orthogonale de E au (d_2).
- **d-** En déduire, en utilisant les deux parties **b-** et **c-**, que E est équidistant de (d_1) et (d_2).

III- (3 points)



Dans la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O et diamètre [AC]. B est un point de (C) distinct que A et C. D et E sont deux points tel que les deux triangles BCD et ACE sont directes et équilatérales. G est le centre de gravite de BCD. Les deux droites (AB) et (CG) se coupent en M. La droite (AE) coupe (C) en E'.

Partie A

1) Montrer que O, D et G appartiennent à la médiatrice (Δ) de [BC].

2) f est l'homothétie de centre C qui transforme (Δ) en (AB). Déterminer le rapport de f et montrer que G est le milieu de [MC].

3) S est la similitude de centre C qui transforme B en M.

- **a-** Déterminer le rapport et l'angle de S, et montrer que S(E') = E.
- **b-** Soit (C') l'image du cercle (C) par S. Montrer que le centre O' de (C') est le point d'intersection de (CE') et (OE).
- **c-** Montrer que (C') passe par C, E, M et A. Tracer (C').
- **d-** Déterminer une rotation r et une homothétie h tel que r o h = h o r = S.

Partie B

Le plan est rapporté à un système orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ tel que l'affixe de A est -1.

1) Déterminer les affixes des points C, E et E'.

2)

- **a-** Déterminer les formes complexes de f et S.
- **b-** Déterminer l'affixe de O' et calculer l'aire de cercle (C').

IV- (2 points)

Un joueur a un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et trios urnes U_1, U_2 et U_3 contenant, chacune, k boules (k est un entier naturel et $k > 2$). Urne U_1 contient trios boules noires, urne U_2 contient deux boules noires et urne U_3 contient une boule noire; toutes les boules restes sont blanches.

On considère le jeu suivant : Le joueur lance le dé.

- Si le nombre obtenu est 1, alors il tire simultanément et au hasard deux boules dans U_1.
- Si le nombre obtenu est un multiple de 3, alors il tire successivement avec remise et au hasard deux boules dans U_2.
- Si le nombre obtenu est ni 1 ni un multiple de 3, il tire successivement sans remise et au hasard deux boules dans U_3. On considère les événements suivants :
  N: " Les boules tirées ont deux couleurs différentes ".
  E_i: " L'urne choisie est U_i " (i = 1, 2 ou 3).

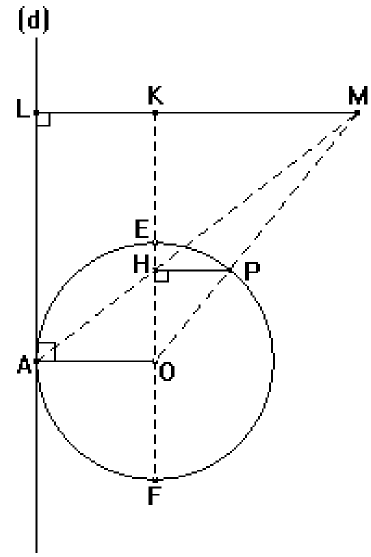
1) Le joueur joue le jeu précédant.

- **a-** Montrer que $P(E_1) = \frac{1}{6}$, puis calculer en fonction de k, $P(N \cap E_1)$.
- **b-** Montrer que la probabilité de tiré deux boules ayant deux couleurs différentes est $\frac{10k^2 - 24k + 8}{3k^2(k-1)}$.
- **c-** Calculer la probabilité que le dé est marqué par 1, sachant que les boules tirées ont deux couleurs différentes.

2) Dans cette partie, soit k = 5. Le joueur joue 20 jeu qui sont indépendantes l'un de l'autre. Calculer la probabilité de tiré au moins, une fois, deux boules ayants deux couleurs différentes.

V- (3 points)

Dans la figure ci-contre,



- (C) est un cercle de centre O et rayon 2 cm.
- A est un point fixe de (C) et P est un point variable de (C).
- Le diamètre de (C) qui est perpendiculaire à (OA) coupe (C) en E et F.
- H est la projection orthogonal de P à (EF).
- M est le point commun de (AH) et (OP).
- (d) est tangente en A à (C).
- L est la projection orthogonale de M à (d).
- K est le point commun de (EF) et (ML).

<u>Partie A</u>

1) Montrer que OM = $2\times\dfrac{KM}{PH}$.

2) Montrer que $\dfrac{MK}{ML}=\dfrac{HP}{OA}$ et déduire que ML = MO.

3) Préciser l'ensemble (Γ) des points M lorsque P décrit (C).

<u>Partie B</u>

Le plan est rapporté au système orthonormé directe $(O;\vec{i},\vec{j})$, où $\vec{i}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.

1)

a- Vérifier que E et F appartiennent à (Γ).

b- Déterminer la tangente en E à (Γ).

c- Préciser le sommet de (Γ) et tracer (Γ).

d- Vérifier que $y^2 = 4(x + 1)$ est une équation de (Γ).

2) Soit N un point défini par $\overrightarrow{HN}=2\overrightarrow{HP}$.

a- Calculer les coordonnées du point N en fonction des coordonnées (x , y) du P, et montrer que N décrit l'ellipse (E) d'équation $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

b- Tracer (E) dans le même système de (Γ) et vérifier que E et F sont les points commune de (E) et (Γ).

3) Soit (D) le domaine limité par (Γ), (E) et les deux droites d'équations $x = -1$ et $x = 4$. Calculer le volume du solide obtenu par la rotation de (D) autour de l'axe des abscisses.

VI- (7 points)

Partie A

On considère l’équation différentielle (E) : $y' - 3y = \dfrac{-3e}{\left(1+e^{-3x}\right)^2}$. g et f sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-3x}g(x)$.

1) Ecrire $g'(x) - 3g(x)$ en fonction de $f'(x)$.

2) Déterminer f de sorte que g soit solution de (E) qui vérifie $g(0) = \dfrac{e}{2}$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}}$. (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Unité graphique: 2cm.

1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier les variations de f.

2) Tracer (C).

3) α est un réel positif non nul. On pose $I_\alpha = \displaystyle\int_0^\alpha f(x)dx$.

a- Donner le signe et une interprétation graphique de I_α en fonction de α.

b- Exprimer I_α en fonction de α.

c- Déterminer la limite de I_α lorsque α tend vers $+\infty$

Partie C

On définit sur **N*** la suite (U_n) par : $U_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)e^{\frac{x}{n}}dx$.

1)

a- Donner le signe de U_n.

b- Donner le sens de variations de la suite (U_n).

c- La suite (U_n) est-elle convergente ?

2)

a- Montrer que $I_1 \leq U_n \leq e^{\frac{1}{n}} I_1$.

b- En déduire la limite de la suite (U_n).

Barèmes

Question I								Note
1)	**C**	**2)**	**B**	**3)**	**A**	**4)**	**A**	**1;1;1;1**

Question II			Note
1)	**a-**	$\vec{U}_{d_2} = -2\vec{U}_{d_1}$	**0,5**
	b-	$(d_1) \subset (P)$ et $(d_2) \subset (P)$	**0,75**
2)	**a-**	$A(-2 , 1 , 2) \in (d_1)$; $B(0 , 1 , 0) \in (d_2)$; $I(-1 , 1 , 1)$ milieu de [AB]; $I \in (d)$ et $\vec{U}_d = \vec{U}_{d_1}$; (d): $\begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = 2\lambda + 1 \\ z = -2\lambda + 1 \end{cases}$	**1**
	b-	$\overrightarrow{IM} \cdot \left(\vec{U}_d \wedge \vec{n}_P\right) = 0$	**0,75**
3)	**a-**	$E \in$ (axes de z), alors $x_E = y_E = 0$; $E \in (Q)$, alors $2x_E - 2y_E - z_E + 5 = 0$; $E(0 , 0 , 5)$	**0,5**
	b-	$M(t - 2; 2t + 1 ; -2t + 2)$; $EM^2 = 9t^2 + 12t + 14$	**0,5**
	c-	$H \in (d_2)$, alors $H(-2m ; -4m + 1 ; 4m)$; $\overrightarrow{EH} \cdot \vec{U}_{d_2} = 0$; $m = \frac{2}{3}$; $H\left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$	**1**
	d-	EM^2 est min. pour $t = -\frac{2}{3}$; $EM = EH = \sqrt{10}$ u; E est équidistante de (d_1) et (d_2)	**1**

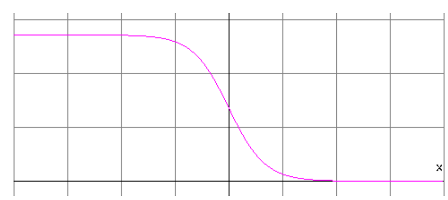
Question III			Note
Partie A			
1)	OB = OC (rayons de (C)), alors O appartient à (Δ). DB = DC (BCD équilatérale), alors D appartient à (Δ). GB = GC (G centre de gravite de ABC, alors G appartient à (Δ)		**0,25** **0,25** **0,25**
2)	f(O) = A et (Δ) est parallèle à (AB), alors rapport = 2. Dans le triangle CMA: $\frac{CO}{CA} = \frac{CG}{CM} = \frac{1}{2}$ alors G milieu de [CM]		**0,25** **0,25**
3)	**a-**	Rapport $k = \frac{CM}{CB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; angle $= \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM}\right) = -\frac{\pi}{6}$. CE′E est demi-équilatérale, alors S(E′) = E	**0,25** **0,25** **0,5**
	b-	Soit O′ le centre de gravité du triangle ACE. COO′ est demi-équilatérale, alors S(O) = O′	**0,5**
	c-	O′A = O′C = O′E (O′ est le centre de gravité du triangle ACE), alors A, C et E appartiennent à (C′); $B \in (C)$, alors $S(B) \in S(C)$, alors $M \in (C')$	**0,25** **0,25**
	d-	$r\left(C; -\frac{\pi}{6}\right)$ et $h\left(C; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	**0,5**
Partie B			
1)	$z_C = 1$; $z_E = i\sqrt{3}$; E′ milieu de [AE], alors $z_{E'} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$		**0,25** **0,25**

2)	a-	f: $z' = 2z - 1$. S: $z' = \left(1 - i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)z + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	0,5 0,5
	b-	$S(O) = O'$, alors $z_{O'} = i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Aire $(C') = \dfrac{4}{3} \times$ aire $(C) = \dfrac{4\pi}{3}u^2$	0,25 0,5

Question IV			Note
1)	a-	$P(E_1) = \dfrac{1}{6}$ obtenant 1 de six nombres; $P(N \cap E_1) = P(N / E_1) \times P(E_1) = \dfrac{k-3}{k(k-1)}$	0,25 0,5
	b-	$P(N) = P(N \cap E_1) + P(N \cap E_2) + P(N \cap E_3) = \dfrac{k-3}{k(k-1)} + \dfrac{4(k-2)}{3k^2} + \dfrac{1}{k} = \dfrac{10k^2 - 24k + 8}{3k^2(k-1)}$	2
	c-	$P(E_1 / N) = \dfrac{P(E_1 \cap N)}{P(N)} = \dfrac{3k^2 - 9k}{10k^2 - 24k + 8}$	0,5
2)		P(N pour k = 5) = $\dfrac{23}{50}$; $P = 1 - \left(1 - \dfrac{23}{50}\right)^{20}$	0,75

Question V			Note
Partie A			
1)		Dans le triangle OMK: $\dfrac{OM}{OP} = \dfrac{KM}{PH}$ et OP = rayon = 2, alors OM = $2 \times \dfrac{KM}{PH}$	0,5
2)		$\dfrac{MK}{ML} = \dfrac{MH}{MA} = \dfrac{MP}{MO} = \dfrac{HP}{OA}$, alors $\dfrac{MK}{ML} = \dfrac{HP}{OA}$, alors $\dfrac{MK}{HP} = \dfrac{ML}{2}$; OM = ML	0,25 0,25
3)		(Γ) est une parabole de foyer O et directrice (d)	0,5
Partie B			
1)	a-	Soit E′ la projection orthogonal de E à (d), alors EOAE′ est un carré, alors $E \in (\Gamma)$. Même démonstration pour F	0,5 0,5
	b-	Tangente = (EA)	0,25
	c-	Sommet I est le milieu de [OA]. Tracer (Γ)	0,25 0,25
	d-	$I(-1, 0)$ et $O(0, 0)$; $Y^2 = 4aX$; $y^2 = 4(x + 1)$	0,5
2)	a-	$P(x, y)$ et $H(0, y)$; $N(2x, y)$; $P \in (C)$, alors $x^2 + y^2 = 4$, alors $\left(\dfrac{x_N}{2}\right)^2 + y_N^{\ 2} = 4$, alors N décrit (E)	0,5 0,5
	b-	Tracer (E). $\begin{cases} y^2 = 4(x+1) \\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$, alors $x = -16$ (à rej.) et $x = 0$, alors $y = -2$ ou $y = 2$, alors $E(0, 2)$ et $F(0, -2)$	0,25 0,5

3)	$V = \int_{-1}^{0} 4\pi(x+1)dx + \int_{0}^{4} \pi\left(4 - \frac{x^2}{4}\right)dx = \frac{38\pi}{3} u^3$	**0,5**

Question VI			**Note**
Partie A			
1)	$g'(x) - 3g(x) = e^{3x} f'(x)$		**1**
2)	g est une solution de (E), alors $g'(x) - 3g(x) = \frac{-3e}{\left(1+e^{-3x}\right)^2}$, alors $e^{3x} f'(x) = \frac{-3e}{\left(1+e^{-3x}\right)^2}$; $f'(x) = \frac{-3e \times e^{-3x}}{\left(1+e^{-3x}\right)^2}$; $f(x) = \int \frac{-3e \times e^{-3x}}{\left(1+e^{-3x}\right)^2} dx = e \times \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{e}{1+e^{-3x}} + C$; $g(0) = f(0)$, $C = e$; $f(x) = -\frac{e}{1+e^{-3x}} + e = \frac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}}$		**1,5**
Partie B			
1)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = e$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $f'(x) = \frac{-3e^{1-3x}}{\left(1+e^{-3x}\right)^2} < 0$		**0,5** **0,5** **1**
1)	$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & \\ \hline f(x) & e & \searrow & 0 \end{array}$	**2)** 	**1** **1,5**
3)	**a-**	$f(x) > 0$ et $\alpha > 0$, alors $I_\alpha > 0$. I_α est l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses, et les deux droites $x = 0$ et $x = \alpha$	**0,5** **0,5**
	b-	$I_\alpha = \frac{e}{3} \ln\left(\frac{2}{1+e^{-3\alpha}}\right)$	**1**
	c-	$\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I_\alpha = \frac{e}{3} \ln 2$	**0,5**
Partie C			
1)	**a-**	Pour $x \in [0\,,1]$: $f(x) > 0$ et $e^{\frac{x}{n}} > 0$, alors $f(x)\, e^{\frac{x}{n}} > 0$, alors $U_n > 0$	**0,5**
	b-	$0 < n < n+1$; $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$; $x \geq 0$, alors $\frac{x}{n} \geq \frac{x}{n+1}$; $\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n} \leq 0$; $f(x) > 0$, alors $\left(\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n}\right) \times f(x) < 0$; $\int_0^1 \left(\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n}\right) \times f(x) dx \leq 0$; alors $U_{n+1} - U_n \leq 0$, alors (U_n) est décroissante	**1,5**
	c-	(U_n) est convergente car elle est une suite décroissante et minorée par 0	**0,5**
2)	**a-**	$0 \leq x \leq 1$; $n > 0$, alors $\frac{0}{n} \leq \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n}$; $e^{\frac{0}{n}} \leq e^{\frac{x}{n}} \leq e^{\frac{1}{n}}$; $1 \leq e^{\frac{x}{n}} \leq e^{\frac{1}{n}}$; $f(x) > 0$, alors	**1,5**

		$f(x) \le f(x)e^{\frac{x}{n}} \le f(x)e^{\frac{1}{n}}\ ;\ \int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 f(x)e^{\frac{x}{n}}dx \le \int_0^1 f(x)e^{\frac{1}{n}}dx\ ;\ I_1 \le U_n \le e^{\frac{1}{n}} I_1$	
	b-	$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = I_1 = \frac{e}{3}\ln\left(\frac{2}{1+e^{-3}}\right)$	**0,5**