

Exercice I (6 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Ecris le numéro de chaque question, et donner en justifiant la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses			
		a	b	c	d
1)	f et g sont deux fonctions telles que $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ et $g(x) = \frac{x}{x-1}$	$\mathbb{R} - \left\{1; \frac{2}{3}\right\}$	$\mathbb{R} - \left\{1; \frac{-2}{3}\right\}$	$\mathbb{R} - \left\{-1; \frac{2}{3}\right\}$	$\mathbb{R} - \left\{-1; \frac{-2}{3}\right\}$
	a) Soit $h = fog$; le domaine de définition de h est : b) $h'(2) = (fog)'(2) =$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{4}{3}$
2)	f est une fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^5 + x + 1$, f admet sur \mathbb{R} une fonction réciproque g. Alors S est le point d'inflexion de (C_g)	S (0 ; 1)	S (0 ; -1)	S (1 ; 3)	S (0 ; 0)
3)	Soit le nombre complexe $W = 1 + e^{\frac{i\pi}{6}}$. Alors la forme exponentielle de W est :	$2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{\frac{i\pi}{12}}$	$2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{\frac{i\pi}{12}}$	$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{\frac{i\pi}{12}}$	$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{\frac{i\pi}{12}}$
4)	Soit le nombre complexe $u = (\sqrt{2} - \sqrt{6}) - i(\sqrt{2} + \sqrt{6})$. On sait qu'un argument de $u^2 = \frac{5\pi}{6}$. Alors $\arg(u) =$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{-\pi}{12}$
5)	Si a ; b ; c et d sont les racines de l'équation $z^4 + z - 1 + i = 0$. Alors $a \times b \times c \times d =$	$\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$	$\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}$	$\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$	$\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}}$

Exercice II (11 ½ points)

1) a- Soit le nombre complexe $t = 3 + 4i$.

Ecrire sous forme algébrique les racines carrées de t. (1 pt)

b- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 6iz - 12 - 4i = 0$. (1 pt)

2) Soit l'équation (E) : $z^3 - 4iz^2 - 4iz + 8 - 24i = 0$.

a- Montrer que $z = -2i$ est une solution de (E). (1 pt)

b- Montrer que (E) peut s'écrire sous la forme $(z + 2i)(z^2 + pz + q) = 0$ où p et q sont deux nombres complexes que l'on déterminera. (1 pt)

c- En déduire les solutions de (E) sous forme algébriques. (1 pt)

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

On considère les points C, D et F d'affixes

respectives $c = 2 + 4i$; $d = -2 + 2i$ et $f = -2i$.

- a- Placer les points C ; D et F. (½ pt)
- b- Déterminer les formes algébriques et exponentielles de $\frac{z_C - z_D}{z_F - z_D}$.
 En déduire la nature du triangle CDF. (1⁺ pt)
- 4) a- Trouver l'affixe e du point E tel que : $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE}) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$ et $DC = DE$. (1 pt)
 b- Dans la suite, on suppose que $E(e = -4 + 6i)$ et $H(h = -6)$
 Démontrer que les points C, E, H et F sont sur un même cercle de centre D. (1 pt)
- 5) M est un point variable d'affixe z distinct de F. On pose $z' = \frac{z+4-6i}{z+2i}$
 Trouver l'ensemble des points M dans chacun des cas suivants :
- a) $|z'| = 1$. (1 pt)
- b) z' est imaginaire pur. (1 pt)
- 6) a- Trouver les nombres complexes z tels que $z^3 = -2 + 2i$. (1 pt)
 b- Les nombres complexes u, v et w sont les racines cubiques d'un nombre complexe T.
 Calculer la forme algébrique de T si $u + v = -2 + i$. (1 pt)

Exercice III (9 ½ points)

On définit sur \mathbb{R} , deux fonctions f et g telles que $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ et $g(x) = x^3 - x^2 - x - 1$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O ; \vec{i} ; \vec{j}).

(L) la droite d'équation $y = x$.

- 1) a- Etudier les variations de g et dresser son tableau. (1 pt)
 b- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique k et $1,8 < k < 1,9$. (1 pt)
 c- Montrer que $(x) - x = -\frac{g(x)}{x^2+1}$, étudier l'intersection de (C) et (L). (1 pt)
- 2) Trouver $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. En déduire une asymptote (d) à (C). (1 pt)
- 3) a- Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f. (1pt)
 b- Soit $I = [1 ; +\infty[$, trouver $f(I)$. (½ pt)
- 4) Montrer que (C) admet le point E (0 ; 1) comme centre de symétrie. (1⁻ pt)
- 5) Tracer (d) ; (L) et (C). (1⁺pt)
- 6) a- Montrer que f admet sur $[1 ; +\infty[$ une fonction réciproque h. Construire (C_h) . (1 pt)
 b- Trouver une équation de la tangente (T') à (C_h) au point B d'abscisse $\frac{9}{5}$. (1pt)

Exercice IV (4 ½ points)

Un triangle ABC est tel que $AB = 2\sqrt{2}$; $AC = 4$ et $BC = 2(1 + \sqrt{3})$.

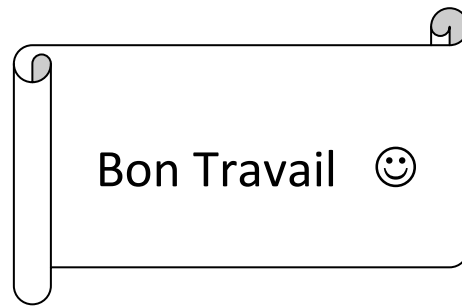
- 1) Calculer $\cos(\hat{A})$. En déduire la valeur de \hat{A} . (1⁺pt)
- 2) Calculer l'aire du triangle ABC. (1 pt)
- 3) Calculer $\sin(\hat{B})$. En déduire la valeur de \hat{B} . (1 pt)
- 4) Calculer la longueur de la médiane [AM] et de la hauteur [AH] du triangle ABC. (1⁺pt)

Exercice V (8 ½ points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 4}$.

(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) a- Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$. (1 ½ pt)
b- Interpréter graphiquement les résultats. (½ pt)
- 2) a- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations. (1 pt)
b- Trouver l'équation de la tangente (T) à (C) au point A d'abscisse 0. (1 pt)
c- Tracer (C) ; (T) et ses asymptotes. (1 pt)
- 3) a- Montrer que f admet sur \mathbb{R} une fonction réciproque g .
Préciser le domaine de définition de g . (1 pt)
b- Trouver la forme explicite de $y = g(x)$. (1 pt)
c- (C') est la courbe représentative de g . Construire (C) et (C') dans le même repère. (1 pt)
d- Par deux manières calculer $g'(1)$. (1 pt)



Barème SG première épreuve 2013

Problèmes	Solution-Mathématiques	Notes												
I	1) a) h est définie si $x \in D_g$ et $(x) \in D_f, x \neq 1$ et $\frac{x}{x-1} \neq -2; x \neq 1$ et $x \neq \frac{2}{3}$ Alors $x \in \mathbb{R} - \left\{1; \frac{2}{3}\right\}$; la bonne réponse est (a) b) $h'(2) = f'(g(2)) \times g'(2) = f'(2) \times g'(2); f'(x) = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$ et $g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ $h'(2) = \frac{3}{4} \times -1 = \frac{-3}{4}$; la bonne réponse est (b) .	1 1												
	2) f est définie sur $\mathbb{R}; f'(x) = 5x^4 + 1; f''(x) = 20x^3; f''(x) = 0$ pour $x = 0$ <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f''(x)$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>C_f</td> <td>Concave</td> <td>1</td> <td>Convexe</td> </tr> </table> Alors le point $S_1(0; 1)$ est le point d'inflexion de (C_f) , donc le symétrique de S_1 par rapport à la droite $(L): y = x$ qui est $S(1; 0)$ est le point d'inflexion de (C_g) La bonne réponse est (b) .	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f''(x)$	-	0	+	C_f	Concave	1	Convexe	1
	x	$-\infty$	0	$+\infty$										
	$f''(x)$	-	0	+										
	C_f	Concave	1	Convexe										
	4) $W = e^{\frac{i\pi}{12}} \times e^{-\frac{i\pi}{12}} + e^{\frac{i\pi}{12}} \times e^{\frac{i\pi}{12}} = e^{\frac{i\pi}{12}} \left(e^{-\frac{i\pi}{12}} + e^{\frac{i\pi}{12}} \right) = e^{\frac{i\pi}{12}} \left(2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$ $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ par suite $W = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{\frac{i\pi}{12}}$ est la forme exponentielle de W, la bonne réponse est (b) .	1												
5) $\arg(u^2) = 2 \arg(u) + 2k\pi; \arg(u) = \frac{5\pi}{12} + k\pi$; on $\text{Re}(u) < 0$ et $\text{Im}(u) < 0$ On a deux valeurs $k = 0$ ou $k = 1$; la seule valeur acceptable est pour $k = 1$ Car pour $k = 0$; on aura $\text{Re}(u) > 0$ et $\text{Im}(u) > 0$ ce qui contredit l'hypothèse Donc $\arg(u) = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12}$; la bonne réponse est (a) .	1													
6) $a \times b \times c \times d = -1 + i = \sqrt{2} e^{\frac{3i\pi}{4}}$; la bonne réponse est (c) .	1													
II	1) a) $t = 3 + 4i = (2 + i)^2$; donc les racines carrées de t sont $2 + i$ et $-2 - i$. b) $z^2 - 6iz - 12 - 4i = 0; w^2 = 3 + 4i$; alors d'après la partie a) $w = 2 + i$ ou $w = -2 - i, z_1 = -2 + 2i; z_2 = 2 + 4i$.	1 1												
	2) a) $z = -2i$ est une solution de (E) car elle vérifie l'équation (E). b) (E) : $(z + 2i)(z^2 - 6iz - 12 - 4i) = 0; p = -6i$ et $q = -12 - 4i$.	1 1												
	c) $(z + 2i)(z^2 - 6iz - 12 - 4i) = 0; z = -2i$ ou $z^2 - 6iz - 12 - 4i = 0$ $z^2 - 6iz - 12 - 4i = 0$ alors $z = -2 + 2i$ ou $z = 2 + 4i$ d'après 1-b $S = \{-2i; -2 + 2i; 2 + 4i\}$.	1												
	a) C(2; 4); D(-2; 2) et F(0; -2)	$\frac{1}{2}$												

	3) b) $\frac{z_C - z_D}{z_F - z_D} = i = 1 \times e^{\frac{i\pi}{2}}$ or $\frac{z_C - z_D}{z_F - z_D} = \frac{CD}{FD} e^{i(\overrightarrow{FD}; \overrightarrow{CD})}$ donc $\frac{CD}{FD} = 1$; CD = FD $(\overrightarrow{FD}; \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, alors le triangle CDF est rectangle isocèle en D.	1 ⁺															
	4) a) $\frac{z_{DE}}{z_{DC}} = \frac{DE}{DC} e^{i(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE})} = 1 \times e^{\frac{i\pi}{2}} = i$; $z_E - z_D = i(z_C - z_D)$; $z_E = -4 + 6i$.	1															
II	4) b) CD = ED = HD = FD = $2\sqrt{5}u.l$; alors les 4 points sont sur un même cercle de centre D et de rayon $2\sqrt{5}$.	1															
	a) $z' = \frac{z_{EM}}{z_{FM}}$; $ z' = \frac{EM}{FM} = 1$; EM = FM ; l'ensemble des points M est la médiatrice de [EF].	1															
	5) b) z' imaginaire pur si et seulement si $z' \neq 0$ et $\arg z' = \frac{\pi}{2} + k\pi$; k entier Or $\arg z' = (\overrightarrow{FM}; \overrightarrow{EM})$ donc $(\overrightarrow{FM}; \overrightarrow{EM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$; avec M distinct de F et M distinct de E. L'ensemble des points M est le cercle de diamètre [EF] Privé des deux points E et F.	1															
	6) a) $z^3 = -2 + 2i = 2i(1+i) = (1+i)^2(1+i) = (1+i)^3$; $z_0 = 1+i$ est donc une solution de cette équation ; les autres racines sont $z_1 = z_0 j$ et $z_2 = z_0 j^2$ $z_1 = \frac{1}{2}[-1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)]$; $z_2 = \frac{1}{2}[-1 + \sqrt{3} + i(-\sqrt{3} - 1)]$	1															
b) On a $u^3 = v^3 = w^3 = T$ et $u + v + w = 0$ et $u + v = -2 + i$ $w = -(u + v) = 2 - i$; $T = w^3 = (2-i)^3 = 2 - 11i$	1																
III	1) a) g est définie et continue sur \mathbb{R} ; $g'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ $g'(x) = 0$ pour $x = 1$ ou $x = -\frac{1}{3}$	1															
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$-\frac{1}{3}$</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$g'(x)$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td>$-\infty$</td> <td>$-\frac{22}{27}$</td> <td>-2</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </tbody> </table>		x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	$g'(x)$	+	0	-	0	+	$g(x)$	$-\infty$	$-\frac{22}{27}$	-2
	x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$												
	$g'(x)$	+	0	-	0	+											
$g(x)$	$-\infty$	$-\frac{22}{27}$	-2	$+\infty$													
b) dans $[1 ; +\infty[$ la courbe de la fonction g est monotone et continue et elle passe de -2 à $+\infty$; donc elle doit couper l'axe des x en seul point d'abscisse k ; alors $g(x) = 0$ possède une seule solution dans $[1 ; +\infty[$ $g(1,8) \times g(1,9) \approx -0,025 < 0$ alors $1,8 < k < 1,9$.	1																
c) $f(x) - x = \frac{x^2 + 2x + 1 - x^3 - x}{x^2 + 1} = \frac{-x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \frac{-g(x)}{x^2 + 1}$ $f(x) - x = 0$; $g(x) = 0$ admet une seule racine $x = k$. Si A désigne le point d'intersection de (C) et (L) alors A (k ; k).	1																
2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$; alors (d) : $y = 1$ est l'équation d'une asymptote horizontale.	1																

	<p>a) f est définie et continue sur \mathbb{R}</p> $f'(x) = \frac{2(x+1)(x^2+1)-2x(x+1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x+1)(x^2+1-x^2-x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$ <p>$f'(x) = 0$, pour $x = 1$ ou $x = -1$</p> <p>3)</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>-1</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>f'(x)</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td>1</td> <td></td> <td>2</td> <td>1</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	f'(x)	-	0	0	-	f(x)	1		2	1	1
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$													
f'(x)	-	0	0	-													
f(x)	1		2	1													
	<p>3) b) $f(I) =]1; 2]$.</p>	$\frac{1}{2}$															
	<p>4) \mathbb{R} est centré en $x = 0$; $f(-x) + f(x) = 2$?</p> $\frac{(1-x)^2}{x^2+1} + \frac{(1+x)^2}{x^2+1} = \frac{2x^2+2}{x^2+1} = 2 \text{ (vérifiée).}$	1 ⁻															
III	<p>5)</p>	1 ⁺															
	<p>6) a) f est monotone sur $[1; +\infty[$ car $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [1; +\infty[$, donc f admet une fonction réciproque h. (Voir partie 5)</p> <p>(C) et (C') sont symétriques par rapport à (L).</p>	1															
	<p>b) $h'(\frac{9}{5}) = \frac{1}{f'(x)}$ où $f(x) = \frac{9}{5}$; $x = 2$ donc $h'(\frac{9}{5}) = -\frac{25}{6}$</p> <p>$(T') : y - 2 = \frac{-25}{6}(x - \frac{9}{5})$; $(T') : y = \frac{-25}{6}x + \frac{19}{2}$</p>	1															
	<p>1) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos(\hat{A})$; $\cos(\hat{A}) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} < 0$; $\frac{\pi}{2} < \hat{A} < \pi$</p> <p>D'après la calculatrice $\hat{A} = 105^\circ$</p>	1 ⁺															
	<p>2) $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin \hat{A} = 2(1 + \sqrt{3}) u^2$</p>	1															
	<p>3) $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \times BC \times \sin \hat{B}$; $\sin \hat{B} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\hat{B} = 45^\circ$</p>	1															
IV	<p>4) AHB est un triangle rectangle isocèle en H; $AB = AH \times \sqrt{2}$; $AH = 2 u.l.$</p> <p>$BH = AH = 2$; $BM = \frac{BC}{2} = 1 + \sqrt{3}$; $MH = BM - BH = 1 + \sqrt{3} - 2$</p> <p>$MH = (\sqrt{3} - 1) u.l.$</p> <p>Dans le triangle rectangle AHM; $AM^2 = AH^2 + HM^2 = 4 + (\sqrt{3} - 1)^2$</p> <p>$AM = \sqrt{8 - 2\sqrt{3}} u.l.$</p>	1 ⁺															

V	1)	<p>a) $\sqrt{x^2 + 4} = -x + \varphi(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$; $f(x) = x - 1 - x + \varphi(x) = -1 + \varphi(x)$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, alors la droite (d₁) d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $-\infty$.</p> <p>$\sqrt{x^2 + 4} = x + g(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 + g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = -1$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, alors la droite (d₂) d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.</p>	1 ½												
		<p>b) $y = -1$ asymptote horizontale à (C) au voisinage de $-\infty$</p> <p>$y = 2x - 1$ asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$</p>	½												
V	2)	<p>a) $f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}$; si $x \geq 0$ alors $f'(x) > 0$</p> <p>Si $x < 0$, $f'(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2+4})(x-\sqrt{x^2+4})}{\sqrt{x^2+4}(x-\sqrt{x^2+4})} = \frac{-4}{\sqrt{x^2+4}(x-\sqrt{x^2+4})} > 0$</p> <p>Par suite pour tout x réel $f'(x) > 0$</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>α</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>f'(x)</td> <td></td> <td>+</td> <td></td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </tbody> </table>	x	$-\infty$	α	$+\infty$	f'(x)		+		f(x)	-1	0	$+\infty$	1
		x	$-\infty$	α	$+\infty$										
		f'(x)		+											
f(x)	-1	0	$+\infty$												
<p>b) $f(0) = 1$; $y - 1 = f'(0)(x - 0)$; $y - 1 = 1(x)$; (T) : $y = x + 1$</p>	1														
	1														
3)	<p>a) f est continue sur \mathbb{R} et elle est strictement monotone (croissante) alors f admet une fonction réciproque g ; $D_g =]-1; +\infty[$</p>	1 ⁻													
	<p>b) Soit $z = g(x)$; avec $x > -1$; $z = g(x)$ si et seulement si $f(z) = x$ ou $x \in \mathbb{R}$</p> <p>$\sqrt{z^2 + 4} = x - z + 1$; $z^2 + 4 = x^2 + z^2 + 1 - 2xz + 2x - 2z$</p> <p>$z(2x + 2) = x^2 + 2x - 3$; $z = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x + 2} = g(x)$.</p>	1													
	<p>c) Voir 2-c</p>	1 ⁻													

	<p>d) 1^è manière : $g'(1) = \frac{1}{f'(x)}$; $f(x) = 1$; $x + \sqrt{x^2 + 4} = 2$; $2 - x = \sqrt{x^2 + 4}$ $x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4$; $x = 0$; donc $g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = 1$.</p> <p>2^è manière : $g'(x) = \frac{(2x+2)^2 - x^2 - 2x + 3}{(2x+2)^2}$; $g'(1) = \frac{16}{16} = 1$.</p>	1
--	--	---