Classe : $3^{ème}$ Année SG	Année scolaire : 2010-2011
Matière : Mathématiques	

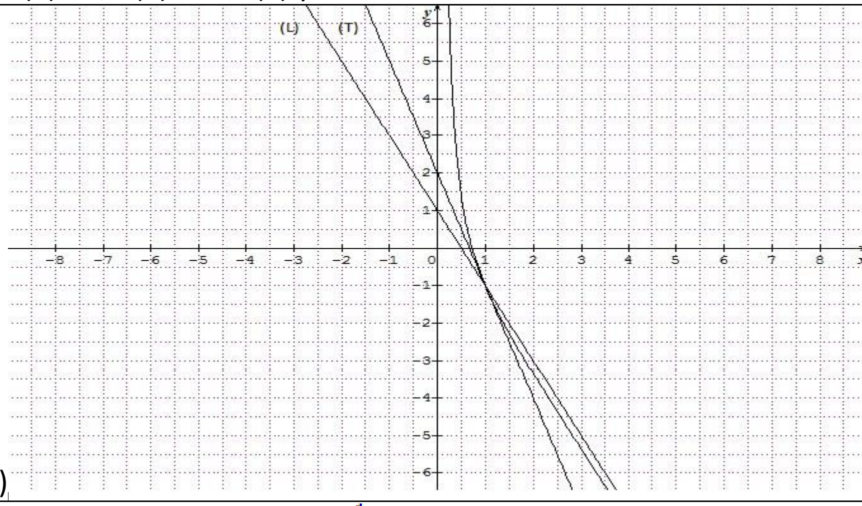
Barème SG (Examen mi-année)

Exercices	Solution-Mathématiques	Notes
1	On pose $arcsinx = \propto$ alors $sin \propto = x \ et \ -\frac{\pi}{2} \leq \propto \leq \frac{\pi}{2}$ alors $f(x) = \cos(2\propto)=1-2\sin^2 \propto = 1-2x^2$ Donc D est correcte	4
	$f'(x) = \pi\cos(\pi x) + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$; alors $f'(0) = \pi$ donc C est correcte	4
	$z = (1+i)(-i^2 sint - i\ cost)$ =-i(1+i)(cost+i sint) argz=arg(-i)+arg(1+i)+arg(cost+isint) (2π) $argz = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + t = -\frac{\pi}{4} + t \quad (2\pi)$;B est correcte	4
	Soit I le milieu de [AB] ; I (1 ; 2 ; 3) ; I est point de (P) $\overrightarrow{AB}$(4 ;-2 ; 4) est $\perp$ à (P). Soit M(x ; y ; z) ϵ (P) ssi $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$=0 alors 2x-y+2z-6=0 ; A est correcte	4
	$D_g =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$;$D_h = [3;+\infty[\ hog(x) = h(g(x))$ il faut que $\begin{cases} x \ \epsilon D_g \\ g(x) \in D_h \end{cases}$;$\begin{cases} x \neq 1 \\ g(x) \geq 3 \end{cases}$;$\begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{2x}{x-1} - 3 \geq 0 \end{cases}$;$\begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{-x+3}{x-1} \geq 0 \end{cases}$ Donc $x \neq 1 \ et \ x \in \ ]1;3]$; $D_{hog} =]1;3]$;A est correcte	4
	$\vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$ $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 6\vec{j} + 5\vec{k}$; B est correcte	4
	1)$\overrightarrow{AB}$(-2;0;-2) ;$\overrightarrow{AC}$(1;-4;-1); $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$=0 alors le triangle ABC est rectangle en A	4
	2) Soit S la surface du triangle ABC . S=$\frac{1}{2}AB.AC$ et S=$\frac{1}{2}BC.AH$ alors AB.AC=BC.AH;$AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{\sqrt{26}} = \frac{12}{\sqrt{26}} = \frac{6\sqrt{26}}{13} \ (u.l)$	4
	3) A(3;2;6) $\in (P)$;$\vec{n}=\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \perp$ à (P) ; M(x;y;z) ϵ (P) ssi $\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$=0 (P):2x+y-2z+4=0	4
	4) (L)=(P)$\cap (Q)$;$\vec{N}_P(2;1;-2) \perp$ (P) ; $\vec{N}_Q(1;2;2) \perp (Q)$; $(P) \perp (Q) \ ssi$	

2	$\vec{N}_P \perp \vec{N}_Q$; $\vec{N}_P.\vec{N}_Q = 0$; $\vec{N}_P.\vec{N}_Q = 2+2-4 = 0$; $(P)\perp(Q)$; (L)=(P)∩ (Q) $(d(O;(L))^2 = (d(O;(P))^2 + (d(O;(Q))^2$; d(O;(P))=$\frac{4}{3}$(u.l);d(O;(Q))=$\frac{\lvert -3\rvert}{3}$=1 $(d(O;(L))^2 = \frac{16}{9}+\frac{9}{9}=\frac{25}{9}; d(O;(L)) = \frac{5}{3}(u.l)$	4
	5) V_{OABC}=$\frac{1}{6}\lvert\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC})\rvert$; $\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}) = 16;\ V_{OABC} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}(u.l)^3$ $V_{OABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}\times d(O;(ABC)); S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\times AC = 6\ \ (u.l)^2$ d(O;(P))=d(O;(ABC))=$\frac{3V_{OABC}}{S_{ABC}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ (u.L)	4
	6) I est le centre de gravite du triangle ABC alors $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ $3\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$; $3\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ $3\overrightarrow{GO}+3\overrightarrow{GI} = \vec{0}$ alors $\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GI} = \vec{0}$; d'où G est le milieu de [OI].	4
3	**Partie A**	
	1)	
	a)$\frac{z_1-3}{z_1} = \frac{-1+i\sqrt{2}}{2+i\sqrt{2}} = \frac{(-1+i\sqrt{2})(2-i\sqrt{2})}{(2+i\sqrt{2})(2-i\sqrt{2})} = \frac{1}{2}i\sqrt{2}$ (imaginaire pur)	3
	b) $\frac{z_1-3}{z_1} = \frac{z_{M_1}-z_B}{z_{M_1}-z_O} = \frac{z_{\overrightarrow{BM_1}}}{z_{\overrightarrow{OM_1}}} = \frac{1}{2}i\sqrt{2}$ arg($\frac{z_{\overrightarrow{BM_1}}}{z_{\overrightarrow{OM_1}}}$)=$(\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{BM_1}) = \arg$ ($\frac{1}{2}$i$\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2}$ (2π) alors le triangle OBM_1 est rectangle en M_1	3
	2) Le triangle OM_2B est le symetrique du triangle OM_1B par rapport à l'axe x'x donc le triangle OM_2B est rectangle en M_2; alors les points O; B; M_1; M_2 appartiennent à un meme cercle (T) de diamètre [OB]; les points M_1et M_2 sont les points d'intersection de (T) avec la droite $x = 2$	3
	Partie B	
	1) AM=$\sqrt{2}$ et $(\vec{u};\overrightarrow{AM})$=$\theta$ (2π) $donc$ $Z_{\overrightarrow{AM}} = \sqrt{2}\ e^{i\theta} = z_M - z_A = z-2$ donc $z = 2+\sqrt{2}e^{i\theta}$	3
	2)$z' = z^2-4z+6 = (z-2)^2+2\ \ avec\ z = 2+\sqrt{2}e^{i\theta}$ $z'-2 = (z-2)^2 = (\sqrt{2}\ e^{i\theta})^2 = 2\ e^{2i\theta}$; $\lvert z'-2\rvert$=$\lvert 2e^{2i\theta}\rvert = 2$; par suite M' varie sur le cercle (Γ') de centre A et de rayon 2	4
	3)	
	a) $d-2 = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{3}}$;$\lvert d-2\rvert = \lvert\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{3}}\rvert$=$\sqrt{2}$ donc $\lvert d-2\rvert = \lvert Z_{\overrightarrow{AD}}\rvert$=AD=$\sqrt{2}$; alors D appartient au cercle (Γ)	4
	b) $z'-2 = (z-2)^2$ alors arg $(z'-2) = \arg((z-2)^2)\ (2\pi)$ arg $(z'-2) = 2\arg(z-2)\ (2\pi) = 2\frac{\pi}{3}$ (2π) $(\vec{u};\overrightarrow{AD'}) = 2(\vec{u};\overrightarrow{AD})(2\pi) = \frac{2\pi}{3}$ (2π); $\frac{z_{\overrightarrow{OD'}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}$=	4

	$\frac{d'}{2}=\frac{d^2-4d+6}{2}=\frac{(d-2)^2+2}{2}=1+\frac{(d-2)^2}{2}$=1+$e^{2i\frac{\pi}{3}}=1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$=$e^{i\frac{\pi}{3}}$; donc $\frac{z_{\overline{OD'}}}{z_{\overline{OA}}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors $\frac{OD'}{OA}=1$ et $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD'}\right)=\frac{\pi}{3}\ \ (2\pi)$; donc le triangle OAD' est équilatéral.	
4	**1)**	
	a) $f(0)=arctan1+arctan1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{\pi}{2}$	3
	b) On a $f(0)$=$\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{\pi}{2}$ alors $f(x)=\frac{\pi}{2}$ pour tout réel x	2
	c) $f'(x)=0\ alors\ f(x)=C=constante\ pour\ tout\ x\ or\ f(0)=\frac{\pi}{2}$ donc $f(x)=C=\frac{\pi}{2}$ pour tout réel x	3
	d)On pose $\arctan\left(\frac{1}{5}\right)=\alpha$ alors $tan\alpha=\frac{1}{5}\ et\ 0<\alpha<\frac{\pi}{4}$;$\arctan\left(\frac{2}{3}\right)=\beta$ alors $tan\beta=\frac{2}{3}\ et\ 0<\beta<\frac{\pi}{4}$;$\tan(\alpha+\beta)=\frac{tan\alpha+tan\beta}{1-tan\alpha.tan\beta}=1$ $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$; alors $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$; $\arctan\left(\frac{1}{5}\right)+\arctan\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{4}$	3
	e)On a $\arctan(x^2+1)+\arctan\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$=$\frac{\pi}{2}$; pour $x=2$ $arctan5+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{\pi}{2}$; pour $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$;arctan($\frac{3}{2}$)+arctan($\frac{2}{3}$) $=\frac{\pi}{2}$ alors $arctan5$+ arctan($\frac{3}{2}$)+ $\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ +arctan($\frac{2}{3}$)=π donc E+$\frac{\pi}{4}$=π;E=3 $\frac{\pi}{4}$	3
4	**2)**	
	a) $g'(x)=\frac{2}{1+4x^2}+\frac{3}{1+9x^2}>0$; alors g est strictement croissante sur IR $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-5\frac{\pi}{4}<0;\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\frac{3\pi}{4}>0$ g est continue sur IR (car elle est dérivable); g change de signe sur IR alors l'équation g(x)=0 admet au moins une solution α; de plus g est strictement monotone sur IR alors l'équation g(x)=0 admet une solution unique α	4
	b) g(0)=$-\frac{\pi}{4}$<0 ; g(1)=arctan2+arctan3$-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$<arctan2<$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$<arctan3<$\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}$<arctan2+arctan3<π; pour x>0 ;0<arctanx<$\frac{\pi}{2}$; pour x<0;-$\frac{\pi}{2}$<arctanx<0 $\frac{\pi}{4}$<arctan2+arctan3$-\frac{\pi}{4}$<$\frac{3\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$<g(1)< $\frac{3\pi}{4}$ donc g(1)>0 or g(0)<0 d'où g(0).g(1)<0 par suite 0<α<1	3
	c) On pose arctan(2x)= α alors tan α=2x et $-\frac{\pi}{2}$< α<$\frac{\pi}{2}$; arctan(3x)=β tan β=3x et $-\frac{\pi}{2}$< β<$\frac{\pi}{2}$; $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$;$\tan(\alpha+\beta)=1$; $6x^2+5x-1=0$ x=-1ou x=$\frac{1}{6}$; pour x=-1 arctan(-2)+arctan(-3)∈ $]-\pi;0[$ or $\frac{\pi}{4}\notin\ ]-\pi;0[$ donc	3

<table>
<tr><td></td><td>x=-1 inacceptable; pour x=$\frac{1}{6}$;arctan($\frac{1}{2}$)+arctan($\frac{1}{3}$)∈ $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ or $\frac{\pi}{4} \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc
x=$\frac{1}{6}$ acceptable ; d'où $\alpha = \frac{1}{6}$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">5</td><td>1) $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + (x+1)^2$; donc f est strictement croissante sur IR ; f est continue sur IR ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
f change de signe sur IR donc l'équation f(x)=0 admet au moins une solution k de plus f est strictement croissante alors l'équation f(x)=0 admet une solution unique k; f(0.5).f(0.6)<0 donc 0.5<k<0.6; 0.5 est la valeur approchée de k à 10^{-1} près par défaut</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2) g(k)=$k^3 + 5k^2 - 11k + 8 = k^3 + k^2 + k - 1 + (4k^2 - 12k + 9)$
=$(2k-3)^2 > 0$ donc g(k)>0</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$(f o g)'(x) = g'(x).f'(g(x)); (f o g)'(1) = g'(1).f'(g(1)) = 34 \times 2$=68</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="5">6</td><td>Partie A</td><td></td></tr>
<tr><td>1) $g'(x) = \frac{1-4x^2}{x} = \frac{(1-2x)(1+2x)}{x}$; comme x>0 alors g'(x) a même signe que 1-2x; g'(x)=0 pour x=$\frac{1}{2}$; pour x<$\frac{1}{2}$ on a g'(x)>0; pour x>$\frac{1}{2}$ on a g'(x)<0</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2) g($\frac{1}{2}$)=$-(\frac{3}{2} + ln2)$
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>g'(x)</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td></tr><tr><td>g(x)</td><td>-∞ ↗</td><td></td><td>↘ -∞</td></tr></table></td><td>4</td></tr>
<tr><td>3) max($g(x)$) = $-(\frac{3}{2} + ln2)$<0 alors g(x)<0 pour tout réel x>0</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Partie B</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="7">6</td><td>1) a) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation x=0 est une A.V</td><td>4</td></tr>
<tr><td>b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - y = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$ alors (L):y=-2x+1 est une asymptote à (C)</td><td>4</td></tr>
<tr><td>d) d(x)=f(x)-y=-$\frac{lnx}{x}$ avec x>0 donc d(x) a même signe que –lnx; d(x)=0 pour x=1; si 0<x<1 on a (C) est au dessus de (L) ; si x=1 (C) coupe (L) au point (1;-1); si x>1 (C) est au dessous de (L)</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2) a) f'(x)=$\frac{-2x^2-1+lnx}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>b)f'(x) est de même signe que g(x) pour x>0; or g(x)<0 pour tout réel x>0 donc f'(x)<0 pour x>0
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f'(x)</td><td>−</td><td></td></tr></table></td><td>4</td></tr>
</table>

	f(x) $+\infty \longrightarrow -\infty$	
	c) f(1)=-1; f'(1)=-3 (T):y=-3x+2	4
	 3)	4
	4)S=S'.u^2; S'=$\int_1^e(-1+2x+\frac{1}{x}\ln x)dx$; S=$(2e^2-2e+1)cm^2 \approx 1034mm^2$	4
	5)$foh(x)=x; f'(h(x)).h'(x)=1$; pour x=-1 et f(1)=-1 ; h(-1)=1 $f'(h(-1)).h'(-1)=1$; f'(1).h'(-1)=1 avec f'(1)=3 d'après l'équation de (T) Donc $h'(-1)$=$-\frac{1}{3}$	4
	6)$k'(x)=\frac{2f(x).f'(x)}{1+f^2(x)}$; $k'(1)=\frac{2f(1).f'(1)}{1+f^2(1)}=3$	4