MATHS Classe : S.E.

Exercice*I* (4½ pts)

Le tableau suivant donne pour une société, le montant $\boldsymbol{x_i}$des ventes annuelles d'un produit(***en milliers de dollars***) et le montant $\boldsymbol{y_i}$des dépenses publicitaires (***en milliers de dollars***) faites pour ce produit pour les années 2004 à 2009.

Années	*2004*	*2005*	*2006*	*2007*	*2008*	*2009*
$\boldsymbol{x_i}$	***4500***	***4800***	***4950***	***5100***	***5250***	***5400***
$\boldsymbol{y_i}$	***26***	***27***	***29***	***31***	***32***	***35***

1) Représenter le nuage des points M_i(x_i; y_i) dans un repère orthogonal.
2) Calculer les moyennes des 2 séries (x_i) et (y_i) puis placer le point moyen G dans le repère précédent.
3) Calculer le coefficient de corrélation r de cette distribution. Interpréter.
4) Trouver l'équation de la droite de régression ($D_{y/x}$) , de y en x , puis tracer cette droite dans le repère précédent.
5) On suppose que la tendance ne change pas et que le budget des dépenses publicitaires pour l'année *2020* est de ***37000*** dollars.
Estimer le montant des ventes pour l'année ***2020***.

Exercice*II* (7½ pts)

On considère la fonction définie sur IR par $f(x)=\dfrac{4x^2-x+1}{2x}$ et sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.

1) Prouver que $f(x)=2x-1+\dfrac{x+1}{2x}$.
2) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine.
3) Vérifier que la droite (D) : $y=2x-\dfrac{1}{2}$ est une asymptote à (C).
4) Vérifier que $f'(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x^2}$ et dresser le tableau de variation de f .
5) Montrer que le point I (0 ;-$\dfrac{1}{2}$) est un centre de symétrie de (C).
6) Trouver une équation de la tangente à (C) au point A d'abscisse 1.
7) Tracer (C) et (D).
8) a) Prouver que f admet sur $\left[-\dfrac{1}{2};0\right[$ une fonction réciproque f^{-1}.
   b) Donner le domaine de f^{-1}et tracer sa courbe dans le même repère que (C).

Exercice *III* (5½ pts)

Pour une entreprise **E** dont la production peut varier de 0 à 300 unités, le coût total de fabrication de x unités est donné par la fonction : $C(x)=\frac{1}{30}.x^3-15.x^2+2500.x$.

La relation liant prix de vente unitaire p et demande x(en unités) est : $p(x)=-\frac{45}{8}x+2750$.

1) Calculer la recette totale $R(x)$ pour la vente de x unités.
2) On appelle recette marginale l'augmentation de recette procurée par la vente d'un objet supplémentaire ; on modélise cette recette marginale par $r_m(x)=R'(x)$, où R' est la dérivée de R.
   Pour quelle valeur de x la recette marginale est-elle égale au coût marginal ?
3) Montrer que le bénéfice pour la production et la vente de x unités est donne par :
   $B(x)=-\frac{1}{30}x^3+\frac{75}{8}x^2+250x$.
   Calculer $B'(x)$, et en déduire que le bénéfice est maximal quand la recette marginale est égale au coût marginal. Que vaut ce bénéfice maximal ?

Exercice *IV* (2½ pts)

D'après une étude du marché, on a modélisé la demande ***D(x)*** *d'un produit en fonction de son prix unitaire x par* $\boldsymbol{D}(x)=\frac{800}{3x-25}$, *pour* $\in[10\,;50]$, *prix exprimé en milliers de LL.*

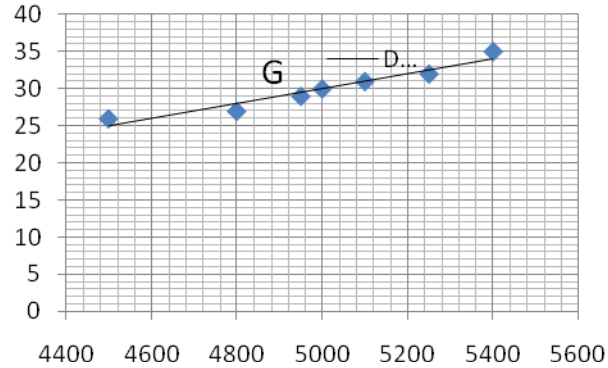
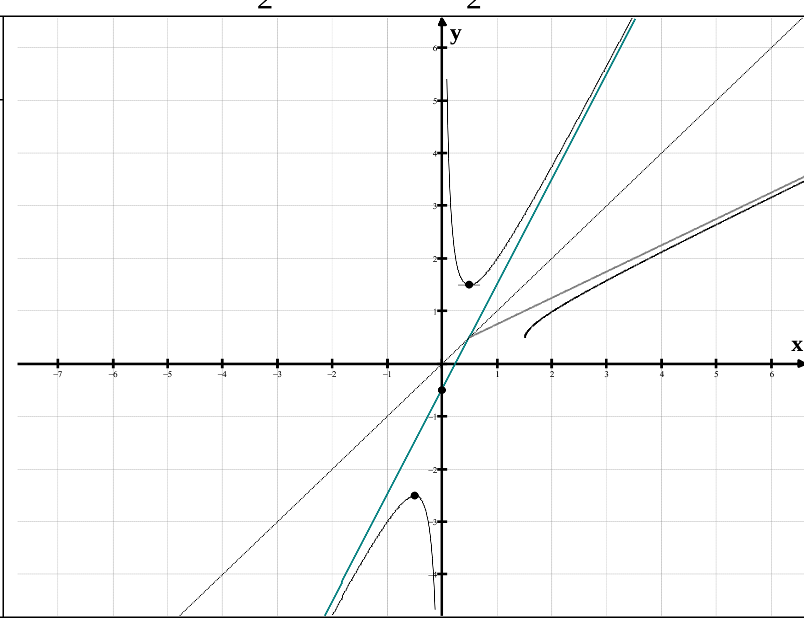
1) *Déterminer l'élasticité de la demande par rapport au prix.*

2) *Calculer cette élasticité pour* $x=\mathbf{15}$.

   a) *En donner une interprétation en termes de variations.*

   b) *D est-elle élastique pour le prix de 15 milliers de LL ?*

Eléments de réponses et barème

Exercice		solution	note
I	*1)*		1
	2)	$\bar{X} = 5000; \bar{Y} = 30$; *G(5000 ;30)*	1
	3)	*r=0,968245836 ; il ya une corrélationlinéaire forte positive entre x et y*	¾
	4)	$(D_{y/x}) : y = 0{,}01x - 20$ *; passe par G et (2000 ;0)*	¾
	5)	*Y=37 ; x=5700 alors le montant des ventes s'élèvent **à 5700 000 $***	1
II	1)	$2x-1+\frac{x+1}{2x}=\frac{4x^2-2x+x+1}{2x}=\frac{4x^2-x+1}{2x}=f(x)$	½
	2)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\pm\infty$; $x=0$ AV .	½½
	3)	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(2x-\frac{1}{2})]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{1}{2x})=0$. AO	½
	4)	$f'(x)=\frac{(8x-1)(2x)-2(4x^2-x+1)}{(2x)^2}=\frac{16x^2-2x-8x^2+2x-2}{4x^2}=\frac{8x^2-2}{4x^2}=\frac{4x^2-1}{2x^2}$	½
		$\begin{array}{c\|ccccc\|\|ccccc} f'(x) & & + & 0 & - & & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & -\frac{5}{2} & \searrow & -\infty & +\infty & \searrow & \frac{3}{2} & \nearrow & +\infty \end{array}$	1½
	5)	$D=\mathbb{R}^*$ centré en O; $f(-h)+f(h)=2(-\frac{1}{2})$; donc $I(0;-\frac{1}{2})$ centre de symétrie de (C).	½
	6)	(T) : $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$.	½
	7)		1½

	8)	a) f est continue et strictement croissante sur $[-\frac{1}{2};0[$, donc f est une bijection et admet une fonction reciproque f^{-1} sur $[-\frac{1}{2};0[$. b) $D_{f^{-1}} = f([-\frac{1}{2};0[) =]-\infty;-\frac{5}{2}]$. La courbe de f^{-1} est obtenue par symetrie % à la droite $y = x$	½ ½ ½

Exercice		solution	note
III	1)	$R(x) = x.p(x) = \frac{-45}{8}x^2 + 2750x$	1
	2)	$R'(x) = -\frac{45}{4}x + 2750$; $C'(x) = \frac{x^2}{10} - 30x + 2500$; $C'(x) = R'(x)$ donc $2x^2 - 375x - 5000 = 0$; $x = -12{,}5$(à rejeter) ; $x = 200$(acc.)	½ ½ ½ ½
	3)	$B(x) = R(x) - C(x) = \frac{-45}{8}x^2 + 2750x - \left(\frac{x^3}{10} - 15x^2 + 2500x\right) = -\frac{1}{30}x^3 + \frac{75}{8}x^2 + 250x$ $B'(x) = -\frac{1}{10}x^2 + \frac{75}{8}x + 250$ de racine positive 200 ; Tableau des variations de B B admet un max en 200 où la recette marginal = cout marginal. B max = B(200) =158333,333	½ ½ ½ ½ ½
IV	1)	$e(x) = \frac{-3x}{(3x-25)^2}$	1
	2)	$e(15) = \frac{-45}{(3x-25)^2} = -1{,}8$.	1½
	3)	<u>Interprétation :</u> lorsque le prix augmente de 1%, au niveau du prix de 15000 LL, la demande diminue de 1,8%.	1
		$-1{,}8 < -1$ donc c'est l cas d'une demande élastique.	1