Matière :Maths
Classe : LH

I - (20 points)

Soit f la fonction définie, sur$]-\infty\ ;1[\cup]1\ ;+\infty[$, par :

$$f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$. Déduire une asymptote (D) à (C).

2) a- Vérifier que : $f(x)=x-1+\frac{1}{x-1}$.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c- Montrer que la droite (d) d'équation $y=x-1$ est une asymptote à (C).

d- Etudier suivant les valeurs de x la position relative de (C) par rapport à (d).

3) Vérifier que $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

4) Dresser le tableau de variations de f.

5) Vérifier que le point I(1 ; 0) est un centre de symétrie pour (C) .

6) Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point A d'abscisse 2.

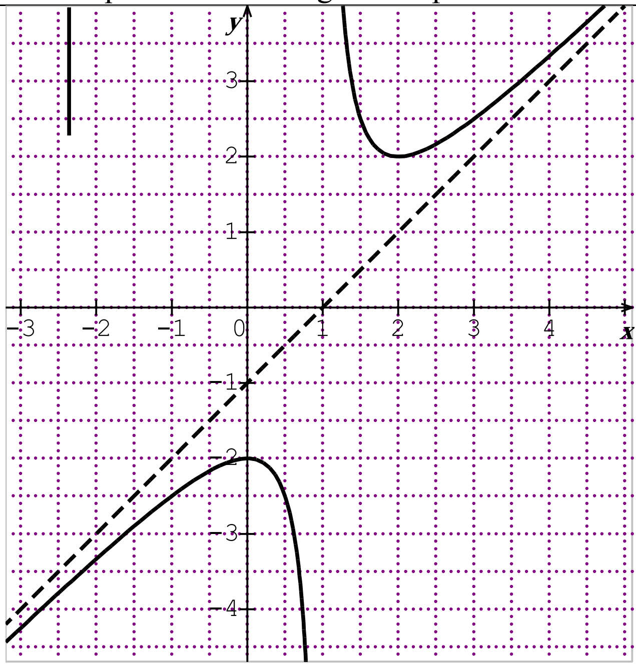
7) Tracer les droites (D), (d) et (C).

8) Trouver les points d'intersection de (C) avec les axes des coordonnées .

9) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation $\frac{x^2-2x+2}{x-1}=m.$

Matière :Maths
Classe : LH

I-	ELEMENTS DE REPONSES	NOTES
1	$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$. La droite (D) d'équation x =1 est asymptote à (C).	1 .5
2a	$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}$	1.5
2b	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (x) = -\infty$ de même $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.	2
2c	$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$. La droite (d) d'équation y = x –1 est asymptote à (C).	1.5
2d	Pour $x \in]-\infty; 1[$: (C) est au dessous de (d) . Pour $x \in]1; +\infty[$: (C) est au dessus de (d) .	2
3	$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-1) - x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2} =$ $\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.	2 .5
4	$\begin{array}{c\|ccccccccc} x & -\infty & & 0 & & 1 & & 2 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \| & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & -2 & \searrow & -\infty \| +\infty & \searrow & 2 & \nearrow & +\infty \end{array}$	2
5	f(1- x) + f(1+x) = 0 Donc le point I(1 ; 0) est un centre de symétrie pour (C) .	1.5

6	(T) : y = 2 c'est l'équation de la tangente au point A	1.5
7		2
8	(0 ;-2) est le point d'intersection avec (y'oy) .	0.5
9	Pour m< –2 ; 2 solutions. Pour m = – 2 ; 1 solution (double). Pour – 2 <m < 2 ; pas de solutions. Pour m = 2 ; 1 solution (double). Pour m > 2 ; 2 solutions.	1 .5