MATHÉMATIQUE

64

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des Sciences Médicales
Faculté de Médecine Dentaire
Faculté de Pharmacie

Date : 09-10-2001
Durée : 1 Heure

Concours d'admission en deuxième année
Année académique 2001-2002
Mathématiques

CORRIGÉ PAGE 116

Partie II : Analyse

Exercice 1

Soit la fonction f telle que :

$$f(x) = \frac{x\ln(1+2x) + \mathrm{sh}(ax)}{x} \qquad (a \text{ étant un réel donné}).$$

1° Donner le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de zéro.

2° Démontrer que f est prolongeable par continuité en $x = 0$.

3° Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C de cette fonction ainsi prolongée au point A d'abscisse $x = 0$ de C.

4° On suppose $a = \sqrt[3]{12}$. Étudier la position relative de C et de T au voisinage de A.

Exercice 2

Soit $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1+\cos x}$.

1° En intégrant par parties J, trouver la valeur de I.

2° Calculer alors J.

Exercice 3

Soit l'intégrale double $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où f est une fonction continue sur le domaine D défini par

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ 0 \le y \le 1,\ x^2 + y^2 - 2y \le 0 \text{ et } x \le 0\right\}.$$

1° Dessiner D.

2° Écrire I en coordonnées cartésiennes de deux manières différentes, en changeant l'ordre d'intégration.

3° Calculer l'intégrale I dans le cas où $f(x,y) = 2x$.

Exercice 1

1° Au voisinage de $x = 0$ et à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)\\
\sqrt{1+x^3} &= 1 + \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)\\
\ln(1+x^2) &= x^2 + x^3\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right) - \left(1+\dfrac{x^3}{2}\right) + 1}{2x - x^2} + x^2\varepsilon(x) = \frac{1-x^2}{2-x} + x^2\varepsilon(x)\\
&= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \left(\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0\right).
\end{aligned}$$

2° Puisque $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$, la fonction f est donc prolongeable par continuité en $x = 0$ par la fonction

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0;\\ f(x) & \text{si } x \neq 0.\end{cases}$$

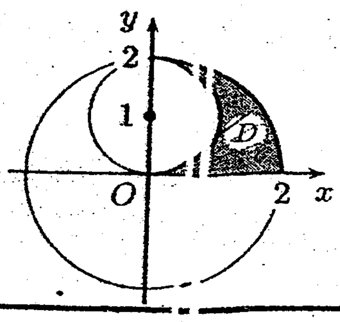
3° L'équation de la tangente est : $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$.

D'autre part, $f(x) - y \sim -\frac{3}{8}x^2 < 0$ au voisinage de $x = 0$, donc la courbe est au-dessous de la tangente.

Exercice 2

Le domaine D est définie en coodonnées polaires par :

$$\Delta : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\\ 2\sin\theta \leq r \leq 2\end{cases}$$



On a :

$$I = \iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta (\cos\theta + \sin\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \int_{2\sin\theta}^{2} \mathrm{d}r \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta)(1 - \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta - \cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\left[\sin\theta - \cos\theta + \frac{\cos(2\theta)}{4} - \frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3 - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

car $\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$ et $\sin^2\theta = \frac{1}{2}[1-\cos(2\theta)]$.

Exercice 3

Il s'agit d'une équation différentielle homogène. Posons $\frac{y}{x} = z$. D'où $y = xz$ et $y' = z + xz'$. Par substitution on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}z}{1+e^z} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Par intégration,

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{1+e^z} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \text{soit} \quad \int \frac{e^{-z}\,\mathrm{d}z}{1+e^{-z}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

donc : $\quad -\ln\left|1 + e^{-\frac{y}{x}}\right| = \ln|x| + \text{cte}$

soit, $\quad |x|\left(1 + e^{-\frac{y}{x}}\right) = c$, où c est une constante positive.

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des Sciences Médicales
Faculté de Médecine Dentaire
Faculté de Pharmacie

Date : 09-10-2002
Durée : 1 Heure

Concours d'admission en deuxième année
Année académique 2002-2003
Mathématiques

CORRIGÉ PAGE 119

Partie I - Analyse

Exercice 1

[8 pts.]

1° Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{x\cos x - \sqrt{1+x^3}+1}{2x - \ln(1+x^2)}.$$

2° Montrer que f est prolongeable par continuité au point d'abscisse $x = 0$ et donner son prolongement g.

3° Trouver l'équation de la tangente à la courbe représentative (C) de g au point $x = 0$. Préciser la position de (C) par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

Exercice 2

[7 pts.]

En utilisant les coordonnées polaires, calculer l'intégrale :

$$I = \iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 4,\ x^2+y^2-2y \geq 0,\ x > 0,\ y > 0\right\}$.

Exercice 3

[5 pts.]

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$xy' - y = x\left(1 + e^{\frac{y}{x}}\right).$$

Exercice 1

Au voisinage de $x = 0$, on a :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+3(x+x^2)} &= 1 + \frac{1}{3}\left[3(x+x^2)\right] + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{\left[3(x+x^2)\right]^2}{2!} + x^2\varepsilon(x)\\ &= 1 + x + x^3\varepsilon(x).\end{aligned}$$

D'où $\quad f(x) = \dfrac{2(1+b)+2(1-a)x-bx^2}{x^2} + \varepsilon(x).$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ est finie pour $b=-1$ et $a=1$. Il vient alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Exercice 2

1° $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x} \mathrm{d}y + \int_{\sqrt{2}}^{2} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}y.$

2° $$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_{2\cos\theta}^{2} r\,\mathrm{d}r = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [1-\cos(2\theta)]\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 3

1° De $y' = \sin(2x)e^{y+\cos^2 x}$ on tire

$$e^{-y}\,\mathrm{d}y = -e^{\cos^2 x}\,\mathrm{d}(\cos^2 x)$$

et par intégration on obtient $-e^{-y} = -e^{\cos^2 x} + \text{cte}$.

2° La solution générale de $y'' - 4y' + 4y = 0$ est $y_H = (C_1 + C_2 x)\,e^{2x}$. Trouvons une solution particulière de l'équation différentielle complète $y''-4y'+4y = 5e^{5x}$ sous la forme $y_p = ae^{3x}$. Par substitution on trouve $a = 5$. D'où

$$y = y_H + y_p = (C_1 + C_2 x)\,e^{2x} + 5e^{3x}.$$

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des Sciences Médicales
Faculté de Médecine Dentaire
Faculté de Pharmacie

Date : 30-09-03
Durée : 1 Heure

Concours d'admission en deuxième année
Année académique 2003-2004
Mathématiques

CORRIGÉ PAGE 123

Partie II - Analyse

Exercice 1 ——— (6 pts.)

En utilisant les développements limités, déterminer les deux paramètres a et b pour que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3(x+x^2)} - ax + b\cos x}{x - \ln(1+x)}$$

soit finie. Déterminer alors cette limite.

Exercice 2 ——— (8 pts.)

On considère l'intégrale double $I = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où D est défini par :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 4,\ (x-1)^2+y^2 \geq 1 \text{ et } y \leq x\right\}.$$

1° Sans calculer I, préciser en coordonnées cartésiennes les bornes d'intégration de I, en fixant x d'abord (verticalement).

2° En utilisant les coordonnées polaires, calculer I.

Exercice 3 ——— (6 pts.)

Résoudre au choix **une et une seule** des deux équations différentielles suivantes :

1° $y' = \sin(2x)e^{y+\cos^2 x}$;

2° $y'' - 4y' + 4y = 5e^x$.

Exercice 1

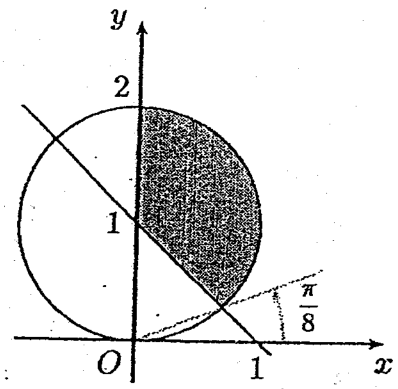
1° $I = \int \frac{t^2+2-2}{2+t^2}\,\mathrm{d}t = t - 2\int \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} = t - \sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + \text{cte}.$

2° $$\begin{aligned} J &= \int \frac{\tan^2 x}{\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\tan^2 x}{2+\tan^2 x}\,\mathrm{d}(\tan x) \\ &= \tan x - \sqrt{2}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + \text{cte} \quad (\text{d'après } 1° \text{ où } t = \tan x). \end{aligned}$$

Exercice 2

Le domaine D est défini par :

$$D : \begin{cases} \alpha \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta} \le r \le 2\sin\theta \end{cases}$$



où α est tel que $\tan\alpha = \sqrt{2}-1$ $\left(\alpha = \frac{\pi}{8}\right)$.

Donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{2\sin\theta} \frac{\mathrm{d}r}{r^3} = \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2r^2}\right]_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{2\sin\theta} \mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{2}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4\sin^2\theta} - (\cos\theta+\sin\theta)^2\right] \mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{8}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta} + \frac{1}{2}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} [1+\sin(2\theta)]\,\mathrm{d}\theta \\ &= \left[\frac{\cot\theta}{8} + \frac{\theta}{2} - \frac{\cos(2\theta)}{4}\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16} + \frac{3+2\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

car $\cot\alpha = \sqrt{2}+1$ et $\cos(2\alpha) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 3

1° Posons $t = \frac{1}{x}$ et donnons le d.l. de $tf\left(\frac{1}{t}\right)$ à l'ordre 2 au voisinage de $t = 0$. On a :

$$tf\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\left(e^{t\sqrt{1+t}} - 1\right).$$

Au voisinage de $t = 0$, on a à l'ordre 2 :

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + t^2\varepsilon(t)$$

ainsi, on a à l'ordre 3 :

$$e^{t\sqrt{1+t}} = 1 + \left(t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{8}\right) + \frac{1}{2}\left(t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{8}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{8}\right)^3 + t^3\varepsilon(t).$$

D'où :

$$tf\left(\frac{1}{t}\right) = 1 + t + \frac{13}{24}t^2 + t^2\varepsilon(t)$$

et par suite :

$$f(x) = x + 1 + \frac{13}{24x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x).$$

L'équation de l'asymptote (D) est donc $y = x + 1$.
Au voisinage de $+\infty$, $f(x) - y \sim \frac{13}{24x} > 0$, d'où l'asymptote (D) est au-dessous de la courbe (C).

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des Sciences Médicales
Faculté de Médecine Dentaire
Faculté de Pharmacie

Date : 28-09-04
Durée : 1 Heure

Concours d'admission en deuxième année
Année académique 2004-2005
Mathématiques

Partie II - Analyse

CORRIGE PAGE 124

Exercice 1 ——— (6 pts.)

1° Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int \frac{t^2}{2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

2° En déduire l'intégrale $J = \displaystyle\int \frac{\tan^2 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 ——— (8 pts.)

En passant en coordonnées polaires, calculer l'intégrale double :

$$I = \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

où D est défini par :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\; x^2+y^2-2y \leq 0,\; x+y \geq 1 \text{ et } x \geq 0\right\}.$$

Exercice 3 ——— (6 pts.)

Soit $f(x) = x^2\left(e^{\sqrt{\frac{1+x}{x^3}}} - 1\right)$ et (C) sa courbe représentative.
En utilisant les développements limités, trouver l'équation de l'asymptote (D) à (C) au voisinage de $+\infty$, et préciser la position de (C) par rapport à (D).

Exercice 1

1. Au voisinage de 0 et à l'ordre 3, on a :

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2x + x^3\varepsilon(x); \\
e^{x^2} &= 1 + x^2 + x^3\varepsilon(x); \\
\ln(1+2x-x^2) &= 2x - x^2 - \frac{(2x-x^2)^2}{2} + \frac{(2x-x^2)^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \\
&= 2x - 3x^2 + \frac{14x^3}{3} + x^3\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

$\sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!}$

Donc $f(x) = -3 + \frac{14}{3}x + x\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

2. $\lim_{x\to 0} f(x) = -3 = f(0)$, donc f est continue en $x = 0$. On trouve facilement d'après le d.l. que $f'(0) = \frac{14}{3}$. 6

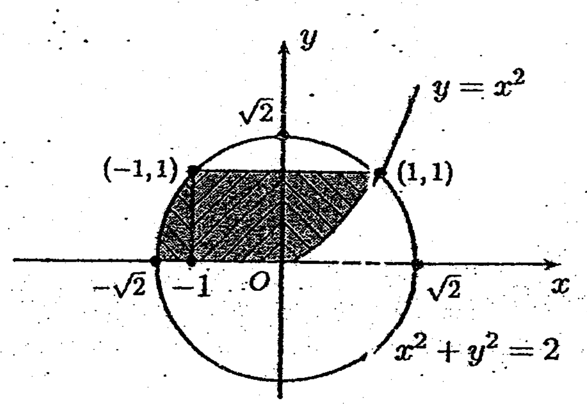
Exercice 2

L'intégrale double s'écrit

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ou

$$I = \int_{-\sqrt{2}}^{-1} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$



Exercice 3

1. Avec le changement de variable défini par $t = \tan\frac{x}{2}$, il vient,

$$I(x) = \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \times \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \mathrm{d}t = \tan\frac{x}{2} + \text{cte}.$$

2. En intégrant par parties avec :

$$u = x, \text{ donc } \mathrm{d}u = \mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{(1+\cos x)^2}, \text{ donc } v = \frac{1}{1+\cos x},$$

on obtient $\displaystyle\int \frac{x\sin x}{(1+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{1+\cos x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$.

Ainsi, $\displaystyle\int \frac{x\sin x}{(1+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{1+\cos x} - \tan\frac{x}{2} + \text{cte}.$

Exercice 4

En notant $z = \frac{y}{x}$, on a $y = zx$, $y' = xz' + z$, et donc l'équation devient :

$$xz' + z = \frac{1+z}{1-z} \quad \text{soit} \quad \frac{1-z}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Par intégration, on obtient : $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = \ln|x| + \text{cte}.$

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des Sciences Médicales
Faculté de Médecine Dentaire
Faculté de Pharmacie

Date : Octobre 2005
Durée : 1 Heure

Concours d'admission en deuxième année
Année académique 2005-2006
Mathématiques

CORRIGÉ PAGE 127

Partie II - Analyse

Exercice 1 (5 pts.)

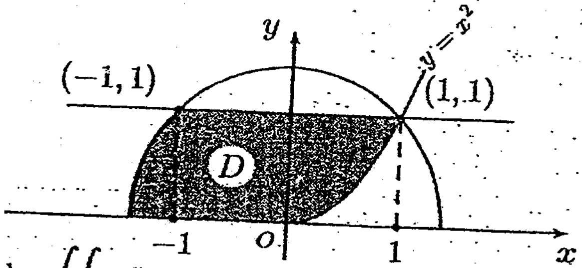
Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x-x^2)-\sin(2x)}{e^{x^2}-1} & \text{si } x \neq 0; \\ -3 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Donner le d.l. à l'ordre 1 de f au voisinage de $x = 0$.
2. Déduire que f est continue en $x = 0$. Déterminer $f'(0)$.

Exercice 2 (5 pts.)

On considère le domaine D, représenté par la figure ci-dessous, délimité par le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$, la parabole $y = x^2$ et la droite $y = 1$.



Écrire l'intégrale double $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ comme succession de deux intégrales simples en coordonnées cartésiennes.

Exercice 3 (5 pts.)

1. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$.
2. En intégrant par parties, calculer $J = \displaystyle\int \frac{x \sin x}{(1+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 (5 pts.)

Résoudre l'équation différentielle $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

Exercice 1

Posons $x = \frac{1}{t}$. Il vient :

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}(2-\cos t)^{\frac{1}{2}}\ln(1+t) \quad \text{soit} \quad tf\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}(2-\cos t)^{\frac{1}{2}}\ln(1+t).$$

Donnons le d.l. de $\frac{1}{t}(2-\cos t)^{\frac{1}{2}}\ln(1+t)$ à l'ordre 2 au voisinage de $t = 0$.
Comme il y a simplification par t, donc, il faut donner le d.l. du numérateur à l'ordre 3. Il suffit de donner le d.l. de $(2-\cos t)^{\frac{1}{2}}$ à l'ordre 2 en $t = 0$ puisque le d.l. de $\ln(1+t)$ commence par t. On a :

$$\begin{aligned} \ln(1+t) &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^2\varepsilon(t); \\ \cos t &= 1 - \frac{t^2}{2!} + t^2\varepsilon(t), \end{aligned}$$

donc $(2-\cos t)^{\frac{1}{2}} = \left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + t^2\varepsilon(t) = 1 + \frac{t^2}{4} + t^2\varepsilon(t)$.
Il s'ensuit que

$$tf\left(\frac{1}{t}\right) = \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3}\right)\left(1 + \frac{t^2}{4}\right) + t^2\varepsilon(t) = 1 - \frac{t}{2} + \frac{7t^2}{12} + t^2\varepsilon(t).$$

Donc :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{7}{12x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x).$$

L'équation de l'asymptote (D) est $y = x - \frac{1}{2}$. D'autre part, lorsque $x \to +\infty$

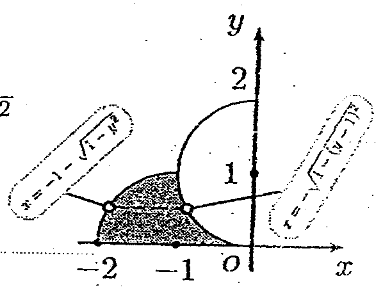
$$f(x) - y \sim \frac{7}{12x} > 0.$$

D'où (C) est au-dessus de (D) au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2

1° En fixant y, le domaine D est défini par :

$$D : \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ -1-\sqrt{1-y^2} \le x \le -\sqrt{1-(y-1)^2} \end{cases}$$

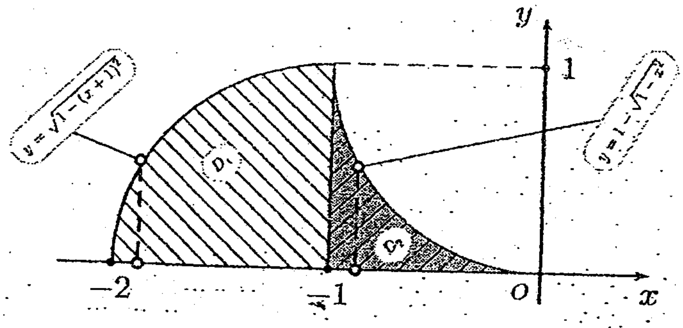


donc $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-1-\sqrt{1-y^2}}^{-\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$

En fixant x, $D = D_1 \cup D_2$, où D_1 et D_2 sont définis par :

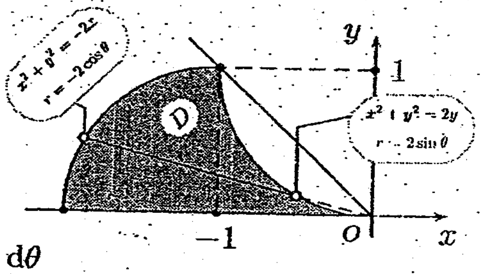
$$D_1 : \begin{cases} -2 \le x \le -1 \\ 0 \le y \le \sqrt{1-(x+1)^2} \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ 0 \le y \le 1-\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

donc $I = \displaystyle\int_{-2}^{-1} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-(x+1)^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_0^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$



2° En coordonnées polaires, le domaine D est défini par :

$$D : \begin{cases} \dfrac{3\pi}{4} \le \theta \le \pi \\ 2\sin\theta \le r \le -2\cos\theta \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
\text{donc } \; I &= \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_{2\sin\theta}^{-2\cos\theta} \cos\theta\,\mathrm{d}r \\
&= -2\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \left(\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= -\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \left(1+\cos(2\theta)+\sin(2\theta)\right)\mathrm{d}\theta \\
&= -\left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} - \frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} = -\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 3

1° $f'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

2° Intégrons par parties en posant :

$$u = \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$$
$$\mathrm{d}v = \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \Rightarrow v = \frac{1}{\cos x}$$

La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\cos x}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos x}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) - 2\tan x + \text{cte}. \end{aligned}$$

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des Sciences Médicales
Faculté de Médecine Dentaire
Faculté de Pharmacie

Septembre 2006

Concours d'admission en deuxième année
Année académique 2006-2007
Mathématiques

CORRIGÉ PAGE 130

Partie II - Analyse

Exercice 1 ________________ (7 pts)

En utilisant les développements limités, déterminer l'asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$ à la courbe représentative (C) de la fonction :

$$f(x) = x^2\left(\sqrt{2-\cos\frac{1}{x}}\right)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

Préciser la position de (C) par rapport à (D).

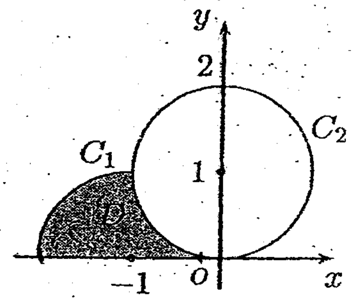
Exercice 2 ________________ (7 pts)

On donne $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ où D est le domaine hachuré de la figure, limité par l'axe des abscisses et les deux cercles d'équations

$$(C_1) : (x+1)^2 + y^2 = 1 \quad \text{et} \quad (C_2) : x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

1° Écrire I de deux façons différentes, en utilisant les coordonnées cartésiennes.

2° En passant en coordonnées polaires, calculer I dans le cas où $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.



Exercice 3 ________________ (6 pts)

1° Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

2° Calculer $I = \displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\,dx$.

Exercice 1. [Médecine & Pharmacie]

1° Au voisinage de $x = 0$:

$$\ln(e+x) = \ln\left[e\left(1+\frac{x}{e}\right)\right] = \ln e + \ln\left(1+\frac{x}{e}\right) = 1 + \frac{x}{e} - \frac{x^2}{2e^2} + x^2\varepsilon(x).$$

Il s'ensuit que $f(x) = \ln(e+x) - \cos x = \dfrac{x}{e} + \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{e^2}\right)x^2 + x^2\varepsilon(x)$.

2° Au voisiange de $x = 0$, on a :

$$\frac{f(x) - a - bx}{x^2} = -\frac{a}{x^2} + \left(\frac{1}{e} - b\right)\frac{1}{x} + \frac{e^2-1}{2e^2} + \varepsilon(x).$$

Pour $a = 0$ et $b = \dfrac{1}{e}$, la limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-a-bx}{x^2}$ est finie et vaut $\dfrac{e^2-1}{2e^2}$.

Exercice 2 [Médecine & Pharmacie]

- $I(t) = \displaystyle\int \frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int\left(t - 1 + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t| + \text{cte}.$
- $J(x) = \displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x(\sin x + \cos x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\tan^2 x}{1+\tan x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}.$

En posant $t = \tan x$, il vient $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Donc :

$$J(x) = \int \frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t = I(t).$$

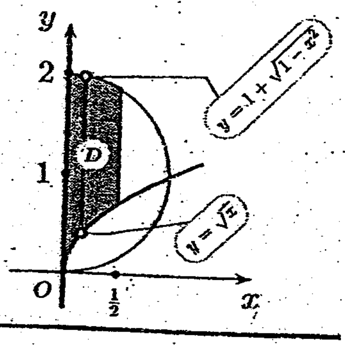
D'où $J(x) = I(\tan x) = \dfrac{\tan^2 x}{2} - \tan x + \ln|1+\tan x| + \text{cte}$.

Exercice 3 [Médecine & Pharmacie]

- En fixant x, le domaine D est défini par :

$$D : \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{x} \le y \le 1 + \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

donc $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$

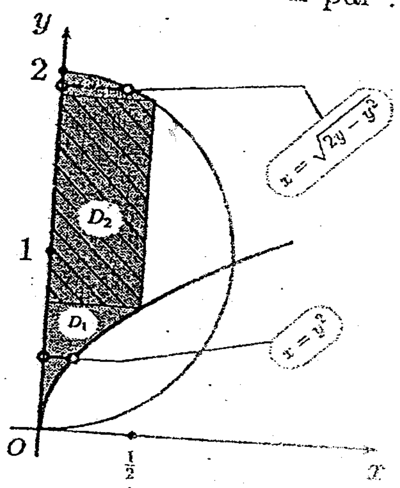


- En fixant y, $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, où D_1, D_2 et D_3 sont définis par :

$$D_1 : \begin{cases} 0 \leq y \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \leq x \leq y^2 \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq y \leq 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$D_3 : \begin{cases} 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq \sqrt{2y - y^2} \end{cases}$$

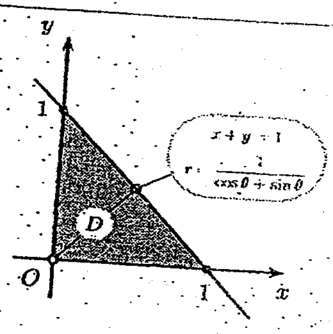


donc $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} \mathrm{d}y \int_0^{\frac{1}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}^{2} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$

Exercice 4 [Médecine]

En coordonnées polaires

$$D : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq \dfrac{1}{\cos\theta + \sin\theta} \end{cases}$$



$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} \frac{r(\cos\theta + \sin\theta)}{r^2} r\,\mathrm{d}r$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 4 [Pharmacie]

Par Green-Riemann :

$$I = \iint_D \left(Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

avec $P(x,y) = -\ln(x^2+y^2)$ donc $P'_y(x,y) = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$,

et $Q(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ donc $Q'_x(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$.

Il s'ensuit que $I = 2\iint_D \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi$ (voir exercice précédent).

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des Sciences Médicales
Faculté de Médecine Dentaire

18 Octobre 2007

Concours d'admission en deuxième année
Année académique 2007-2008
Mathématiques

CORRIGÉ PAGE 135

Partie II : Analyse

Exercice 1 (5 pts.)

1° Donner le d.l. à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f(x) = \ln(e+x) - \cos x$.

2° Déterminer les réels a et b pour que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - a - bx}{x \sin x}$ soit finie. Quelle est alors cette limite ?

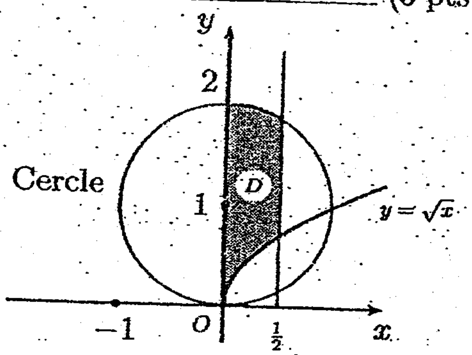
Exercice 2 (5 pts.)

Calculer $\displaystyle\int \frac{t^2}{1+t}\,dt$. Déduire $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x(\sin x + \cos x)}\,dx$.

Exercice 3 (5 pts.)

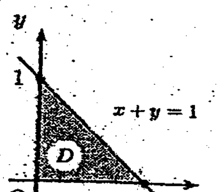
On donne $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ où D est le domaine hachuré de la figure ci-contre.

Écrire I de deux façons différentes, en utilisant les coordonnées cartésiennes.



Exercice 4 (5 pts.)

Calculer $I = \displaystyle\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}$ en utilisant les coordonnés polaires, où D est le domaine de la figure ci-contre.



UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté de Pharmacie

18 Octobre 2007

Concours d'admission en deuxième année
Année académique 2007-2008
Mathématiques

Partie II : Analyse

Exercice 1 — (5 pts.)

1° Donner le d.l. à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f(x) = \ln(e+x) - \cos x$.

2° Déterminer les réels a et b pour que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - a - bx}{x \sin x}$ soit finie. Quelle est alors cette limite ?

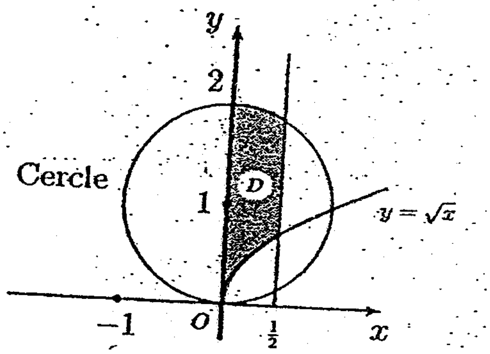
Exercice 2 — (5 pts.)

Calculer $\displaystyle\int \frac{t^2}{1+t}\, dt$. Déduire $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x(\sin x + \cos x)}\, dx$.

Exercice 3 — (5 pts.)

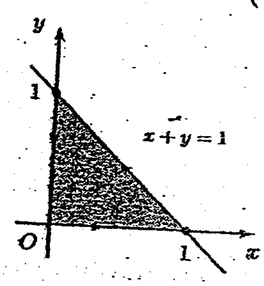
On donne $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$ où D est le domaine hachuré de la figure ci-contre.

Écrire I de deux façons différentes, en utilisant les coordonnées cartésiennes.



Exercice 4 — (5 pts.)

Calculer $\displaystyle\int_{C_+} -\ln(x^2+y^2)\, dx + \ln(x^2+y^2)\, dy$, où C_+ est le contour fermé parcouru dans le sens direct représenté à la figure ci-contre. (Utiliser les coordonnées polaires pour calculer l'intégrale double obtenue.)



Exercice 1

1. Au voisinage de $x = 0$ et à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}\ln(1+x+x^2) &= x + x^2 - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + \frac{1}{3}(x+x^2)^3 + x^3\varepsilon(x)\\ &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)\\ e^{ax^2} &= 1 + ax^2 + x^3\varepsilon(x).\end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad f(x) = \frac{1 + x + \left(\frac{1}{2}+a\right)x^2 - \frac{2x^3}{3}}{1+x^2} + x^3\varepsilon(x)$$
$$= 1 + x + \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2 - \frac{5}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x).$$

2. a) L'équation de la tangente est : $y = x + 1$.

   b) ◊ si $a > \frac{1}{2}$, $g(x) - y \sim \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2 > 0$ et la courbe est au-dessus de la tangente.

   ◊ si $a < \frac{1}{2}$, $g(x) - y \sim \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2 < 0$ et la courbe est au-dessous de la tangente.

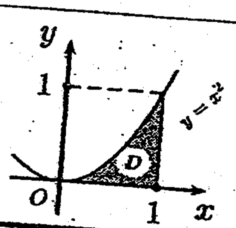
   ◊ si $a = \frac{1}{2}$, $g(x) - y \sim -\frac{5}{3}x^3$ et la courbe est :

   - ◊ au-dessus de la tangente lorsque $x \to 0_-$;
   - ◊ au-dessous de la tangente lorsque $x \to 0_+$.

   Le point $(0, 1)$ est donc un point d'inflexion de la courbe de g, pour $a = \frac{1}{2}$.

Exercice 2

Le domaine D est délimité par les courbes d'équations : $y = 0$, $y = 1$, $x = \sqrt{y}$ (ou $y = x^2$ avec $x \geq 0$), et $x = 1$.



En changeant l'ordre d'intégration D est défini par :

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}} \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[x e^{\frac{y}{x}} \right]_{y=0}^{y=x^2} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (x e^x - x) \,\mathrm{d}x = \left[(x-1)e^x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 3

En posant $t = e^x$, il vient $\mathrm{d}t = e^x \,\mathrm{d}x$ et

$$I = \int \ln\left(\frac{t}{1+t}\right) \mathrm{d}t.$$

Intégrons par parties avec

$$u = \ln\left(\frac{t}{1+t}\right), \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}u = \frac{\left(\frac{t}{1+t}\right)'}{\frac{t}{1+t}} \mathrm{d}t = \frac{1}{t(1+t)} \mathrm{d}t;$$

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}t, \quad \text{donc} \quad v = t.$$

Il s'ensuit que :

$$I = t \ln\left(\frac{t}{1+t}\right) - \int \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t = t \ln\left(\frac{t}{1+t}\right) - \ln(1+t) + \text{cte},$$

soit en revenant à x :

$$I = e^x \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - \ln(1+e^x) + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des Sciences Médicales
Faculté de Médecine Dentaire

08 Octobre 2008

Concours d'admission en deuxième année
Année académique 2008-2009
Mathématiques

CORRIGE PAGE 138

Partie II : Analyse

Exercice 1 — (7 pts.)

1. Donner le d.l. à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x+x^2) + e^{ax^2}}{1+x^2}.$$

2. Soit g une fonction dont le d.l. à l'ordre 3 au voisinage de 0 est :

$$g(x) = 1 + x + \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2 - \frac{5}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x).$$

   a) Donner l'équation de la tangente T à la courbe représentative C de f au point d'abscisse $x = 0$.

   b) Discuter selon les valeurs de a la position relative de C par rapport à T au voisinage de $x = 0$.

Exercice 2 — (6 pts.)

On considère l'intégrale double $I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^1 e^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x.$

1. Dessiner D.
2. Calculer I.

Exercice 3 — (7 pts.)

Calculer $I = \int e^x \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)\mathrm{d}x.$

Exercice 1

Posons $x = \dfrac{1}{t}$. Nous avons :

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt[3]{1+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}}\,e^t = \frac{\sqrt[3]{1+t+t^3}}{t}e^t.$$

A l'ordre 2 et au voisinage de $t=0$, nou obtenons

$$\begin{aligned} tf\left(\frac{1}{t}\right) &= e^t\sqrt[3]{1+t+t^3} \\ &= \left(1+t+\frac{1}{2}t^2\right)\left(1+\frac{1}{3}(t+t^3)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}(t+t^3)^2\right)+t^2\varepsilon(t) \\ &= \left(1+t+\frac{1}{2}t^2\right)\left(1+\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}t^2\right)+t^2\varepsilon(t) \;=\; 1+\frac{4}{3}t+\frac{13}{18}t^2+t^2\varepsilon(t). \end{aligned}$$

D'où

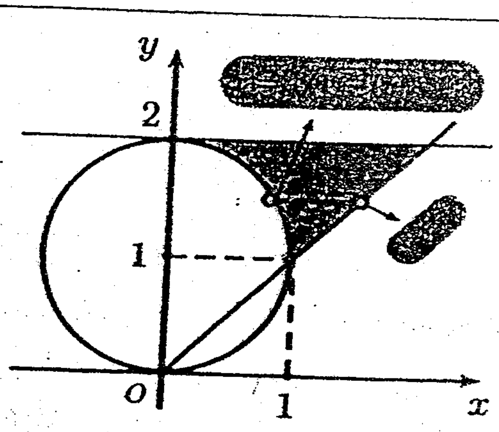
$$f(x) = x+\frac{4}{3}+\frac{13}{18x}+\frac{1}{x}\varepsilon(x).$$

L'équation de l'asymptote (d) en $+\infty$ à la courbe (C) est $y = x+\dfrac{4}{3}$. D'autre part, $f(x)-y \sim \dfrac{13}{18x} > 0$ en $+\infty$. La courbe (C) est donc au-dessus de l'asymptote (d) au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2

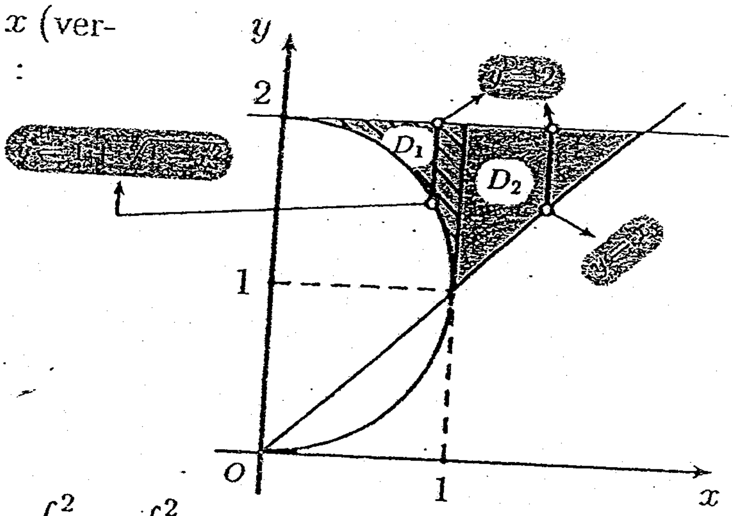
1. **Première façon** : En fixant y (horizontalement), D est défini par :

$$D : \begin{cases} 1 \le y \le 2 \\ \sqrt{1-(y-1)^2} \le x \le y \end{cases}$$



d'où $I = \displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{2y-y^2}}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

Deuxième façon : En fixant x (verticalement), $D = D_1 \cup D_2$ où :



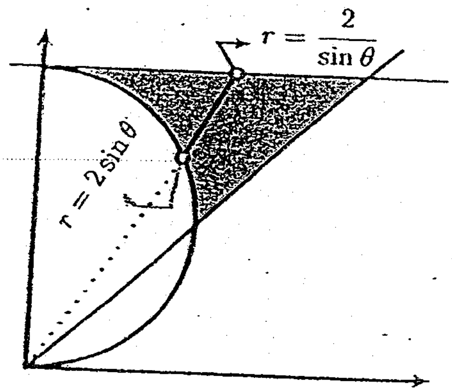
$$D_1 : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2 \end{cases}$$

d'où :

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1+\sqrt{1-x^2}}^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_x^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

2. En coordonnées polaires le domaine D est défini par



$$D : \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 2\sin\theta \leq r \leq \dfrac{2}{\sin\theta} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Aire}(D) &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{2\sin\theta}^{\frac{2}{\sin\theta}} r\,\mathrm{d}r \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\sin^2\theta} - 2\sin^2\theta \right) \mathrm{d}\theta = \left[-2\cot\theta - \theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Exercice 3

1. $$\begin{aligned} I(t) &= \int \frac{t^2}{2t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+2t^2} \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{t}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\mathrm{d}(t\sqrt{2})}{1+(t\sqrt{2})^2} = \frac{t}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(t\sqrt{2}) + \text{cte}. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{\tan^2 x}{1 + 2\tan^2 x} \times \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \\ &= \int \frac{t^2}{2t^2+1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{avec} \quad t = \tan x \\ &= I(\tan x) \\ &= \frac{\tan x}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan x) + \text{cte}. \end{aligned}$$

Pour les corrigés des exercices 1, 2 et 3 voir le corrigé du concours précédent page 153.

Exercice 4

1. <u>**1ère méthode :**</u> $I = -\displaystyle\int \frac{\cos x \, \mathrm{d}(\cos x)}{1+\cos^2 x} = -\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$ **avec** $t = \cos x$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+t^2)}{1+t^2} = -\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) + \text{cte}.$$

<u>**2ème méthode :**</u> $I = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}(1+\cos^2 x)}{1+\cos^2 x} = -\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) + \text{cte}.$

<u>**3ème méthode :**</u> $I = \displaystyle\int \frac{\sin(2x)\,\mathrm{d}x}{3+\cos(2x)} = -\frac{1}{2}\ln(3+\cos(2x)) + \text{cte}.$

<u>**4ème méthode :**</u>

$$I = \int \frac{\tan x}{2+\tan^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{t}{(2+t^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t \quad \textbf{avec} \quad t = \tan x$$

$$= \int \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{2+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t^2}{2+t^2} + \text{cte} = -\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) + \text{cte}.$$

2. $L = \displaystyle\int \sin x \arctan(\cos x)\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}v$ **avec** $u = \arctan(\cos x)$ **et** $\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$

$$\overset{\text{p.p.}}{=} -\cos x \arctan(\cos x) - \int \cos x \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= -\cos x \arctan(\cos x) + \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) + \text{cte}.$$

Exercice 5

Au voisinage de 0, et à l'ordre 2, on a :

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x); \qquad \ln(1-x^2) = -x^2 + x^2\varepsilon(x);$$

$$e^{\cos x} = e^{1-\frac{x^2}{2}} + x^2\varepsilon(x) = e \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2\varepsilon(x) = e \times \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + x^2\varepsilon(x).$$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - e}{\ln(1-x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{e - e\frac{x^2}{2} - e}{-x^2} = \frac{e}{2}.$

UNIVERSITE LIBANAISE
Faculté de Médecine,
Faculté de Pharmacie
Faculté de Médecine Dentaire

Date : 21/9/2010
Durée : 30 minutes

Concours d'entrée en 2ème année (2010-2011)
Matière : Mathématiques

I. (6 pts) Soit a un réel donné.

1- a- Donner les développements limités à l'ordre 3 en $x = 0$ de

$$\cos ax, \quad e^{x-1+\cos ax}, \quad \sin x \quad \text{et} \quad \ln(1+\sin x).$$

b. En déduire le développement limité de la fonction f à l'ordre 3 en $x = 0$

$$f(x) = e^{x-1+\cos ax} + \ln(1+\sin x).$$

2- Soit g la fonction dont le développement limité à l'ordre 3 en $x = 0$ est donné par:

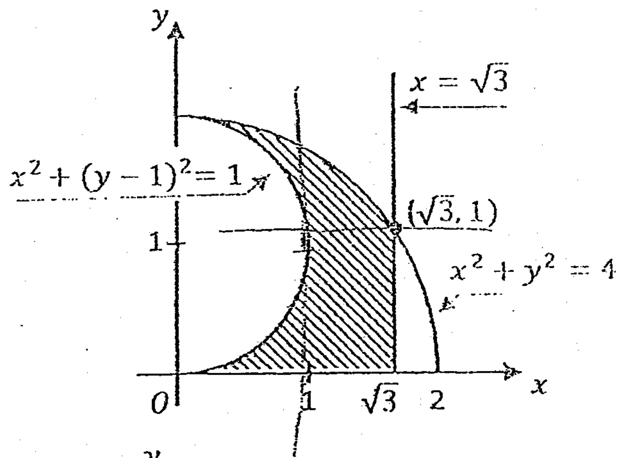
$$g(x) = 1 + 2x - \frac{a^2}{2}x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{a^2}{2}\right)x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

a- Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative (C) de la fonction g en $x = 0$.

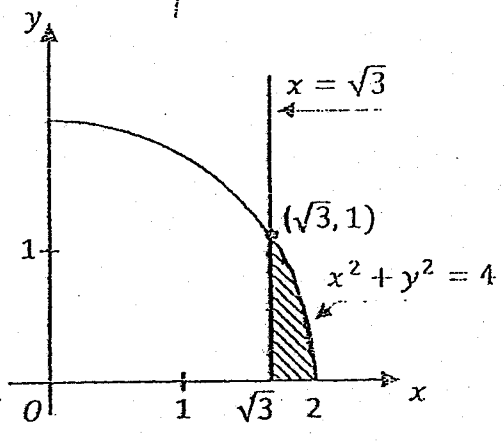
b- Discuter suivant le paramètre a la position relative de (C) par rapport à cette tangente au voisinage de $x = 0$.

II. (8 pts) 1- Soit D le domaine hachuré de la figure.

Ecrire $\iint_D f(x,y)dxdy$ de deux façons différentes en utilisant les coordonnées cartésiennes.



2- Calculer l'aire du domaine hachuré Δ de la deuxième figure en utilisant les coordonnées polaires.



III. (6pts) 1-Calculer l'intégrale :

$$\int \frac{dx}{3+\cos x}$$

2- Résoudre l'équation différentielle $\quad xy' - y = x\left(3 + \cos\frac{y}{x}\right).$

Ex 1 1a) Au voisinage de 0 à l'ordre 3.

$$\boxed{\cos(ax) = 1 - \frac{a^2}{2}x^2 + x^3\varepsilon(x)}$$

$$e^{x-1+\cos ax} = e^{x - a^2/2\, x^2 + x^3\varepsilon(x)}$$

$$= 1 + x - a^2/2\, x^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a^2}{2}x^2\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{a^2}{2}x^2\right)^3 + x^3\varepsilon(x)$$

$$= 1 + x - \frac{a^2}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{a^2}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

$$\boxed{e^{x-1+\cos ax} = 1 + x + \frac{1}{2}(1-a^2)x^2 + \left(\frac{1}{6} - a^2/2\right)x^3 + x^3\varepsilon(x)}$$

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)}$$

$$\ln(1+\sin x) = \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{6}\right) + x^3\varepsilon(x)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + x^3\varepsilon(x)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

$$\boxed{\ln(1+\sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)}$$

b) $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}(1-a^2)x^2 + \left(\frac{1}{6} - a^2/2\right)x^3 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$

$$\boxed{f(x) = 1 + 2x - \frac{a^2}{2}x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{a^2}{2}\right)x^3 + x^3\varepsilon(x)}$$

2) a) $y = 1 + 2x$.

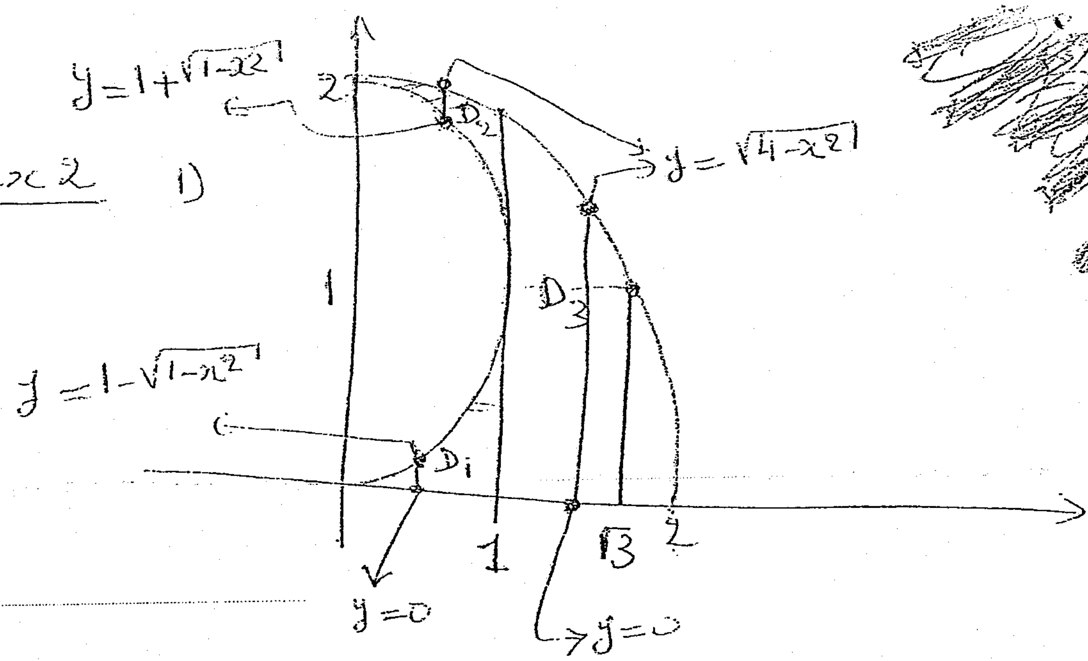
b) *) si $a \neq 0$; $f(x) - y \underset{0}{\sim} -\frac{a^2}{2} < 0 \Rightarrow C_f$ est en dessous de la tgte

*) si $a = 0$; $f(x) - y \underset{0}{\sim} \frac{1}{3}x^3$

si $x > 0$; C_f est au-dessus de la tgte

si $x < 0$; C_f est au-dessous de la tgte.

Ex 2 1)



En fixant x : $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$

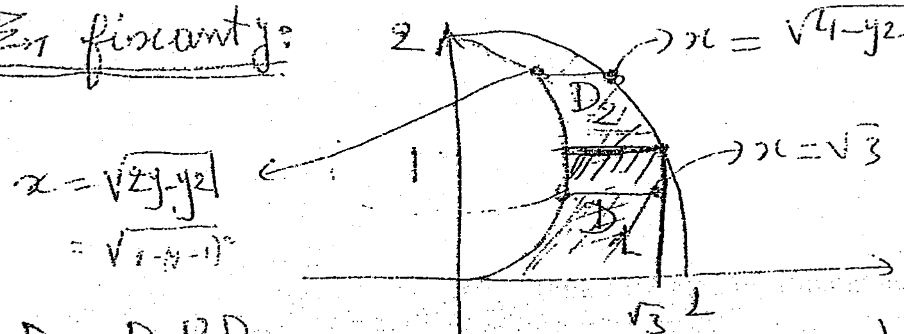
(1) $D_1 : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 & \frac{1}{2} \\ 0 \leq y \leq 1-\sqrt{1-x^2} & \frac{1}{2} \end{cases}$

(1) $D_2 : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 & \frac{1}{2} \\ 1+\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} & \frac{1}{2} \end{cases}$

(1) $D_3 : \begin{cases} 1 \leq x \leq \sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2} & \frac{1}{2} \end{cases}$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-\sqrt{1-x^2}} f\,dy + \int_0^1 dx \int_{1+\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f\,dy + \int_1^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f\,dy$$

En fixant y :



$D = D_1 \cup D_2$

$D_1 : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 & (1) \\ \sqrt{2y-y^2} \leq x \leq \sqrt{3} \end{cases}$. $D_2 : \begin{cases} 1 \leq y \leq 2 & (1) \\ \sqrt{2y-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \end{cases}$

$\sqrt{1-(y-1)^2}$

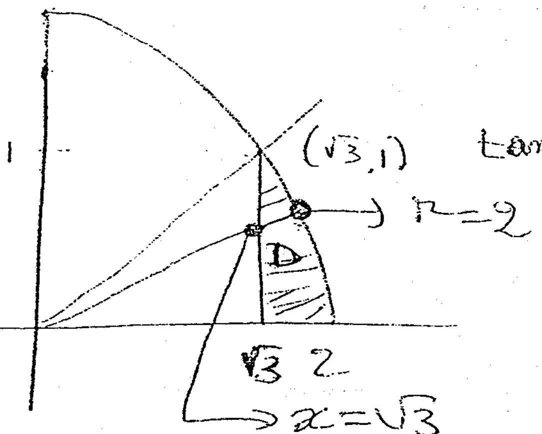
$$I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{3}} f\,dx + \int_1^2 dy \int_{\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f\,dy.$$

$\sqrt{2y-y^2} = \sqrt{1-(y-1)^2}$

Ex 2 2)

$$D : \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi/6 & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta} \le r \le 2 & \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$



$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta =$

$r\cos\theta = \sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$

$$\text{aire}(D) = \iint_D dx\,dy = \iint_\Delta r\,dr\,d\theta \quad \frac{1}{2}$$

$$= \int_0^{\pi/6} d\theta \int_{\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}}^{2} r\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \left[r^2\right]_{\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}}^{2} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \left(4 - \frac{3}{\cos^2\theta}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[4\theta - 3\tan\theta\right]_0^{\pi/6}$$

$$= \frac{1}{2}\left[4\pi/6 - 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$= \pi/3 - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2}$$

3)

Ex III

1. $\int \frac{dx}{3+\cos x}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$\tan\frac{x}{2} = t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2\,dt}{3+3t^2+1-t^2} = \int \frac{2dt}{4+2t^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{d\left(t/\sqrt{2}\right)}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right) + C$$

1

2. $y' - \frac{y}{x} = 3 + \cos\frac{y}{x}$ $\frac{1}{2}$

$\frac{y}{x} = z$, $\frac{1}{2}$ $y = xz$ on a $y' = z + xz'$

$z + xz' - z = 3 + \cos z$,

$x\frac{dz}{dx} = 3 + \cos z$ $\frac{1}{2}$

$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{3+\cos z}$ $\frac{1}{2}$

$\ln\frac{x}{C} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\tan\frac{z}{2}}{\sqrt{2}}\right)$ $\frac{1}{2}$,

$\boxed{\ln\frac{x}{C} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\tan\frac{y}{2x}}{\sqrt{2}}\right)}$ $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des Sciences Médicales

13 Octobr
Durée : 30

Concours d'admission en deuxième année
Année académique 2009-2010
Mathématiques

CORRIGÉ PAG

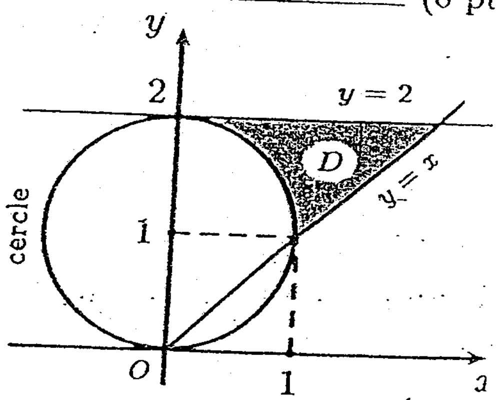
Exercice 1 (7 p

Soit $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}\, e^{\frac{1}{x}}$.
En utilisant des développements limités, trouver l'équation de l'asymp oblique (d) à la courbe représentative (C) de f en $+\infty$ et préciser sa posi relative par rapport à (C).

Exercice 2 (8 pt

Soit $I = \iint_D f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

1. En utilisant les coordonnées cartésiennes, écrire l'intégrale I de deux façons différentes.
2. Calculer l'aire du domaine D en passant en coordonnées polaires.



Exercice 3 (5 pts

Calculer $\displaystyle\int \frac{t^2}{2t^2+1}\, \mathrm{d}t$. En déduire $\displaystyle\int \frac{\tan^2 x}{1 + \sin^2 x}\, \mathrm{d}x$.

90

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté de Médecine Dentaire
Faculté de Pharmacie

13 Octobre 2009
Durée : 1 heure

Concours d'admission en deuxième année
Année académique 2009-2010
Mathématiques

Exercice 1 (9 pts.)

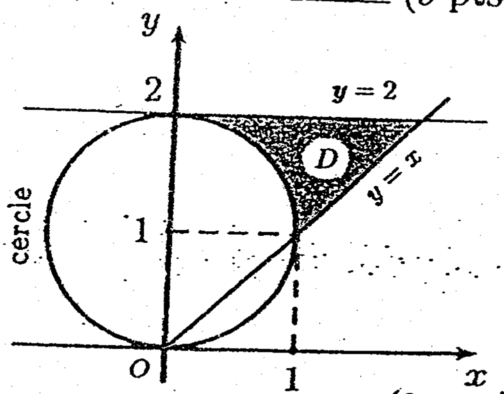
Soit $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}\, e^{\frac{1}{x}}$.

En utilisant des développements limités, trouver l'équation de l'asymptote oblique (d) à la courbe représentative (C) de f en $+\infty$ et préciser sa position relative par rapport à (C).

Exercice 2 (9 pts.)

Soit $I = \displaystyle\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

1. En utilisant les coordonnées cartésiennes, écrire l'intégrale I de deux façons différentes.
2. Calculer l'aire du domaine D en passant en coordonnées polaires.



Exercice 3 (8 pts.)

Calculer $\displaystyle\int \frac{t^2}{2t^2 + 1}\, \mathrm{d}t$. En déduire $\displaystyle\int \frac{\tan^2 x}{1 + \sin^2 x}\, \mathrm{d}x$.

Exercice 4 (7 pts.)

Calculer $\displaystyle\int \frac{\cos x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, \mathrm{d}x$. En déduire $\displaystyle\int \sin x \arctan(\cos x)\, \mathrm{d}x$.

(On rappelle que $(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$).

Exercice 5 (7 pts.)

En utilisant des développements limités, calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{\cos x} - e}{\ln(1 - x^2)}$.

UNIVERSITE LIBANAISE

Faculté de Médecine

Faculté de Médecine Dentaire

Faculté de Pharmacie

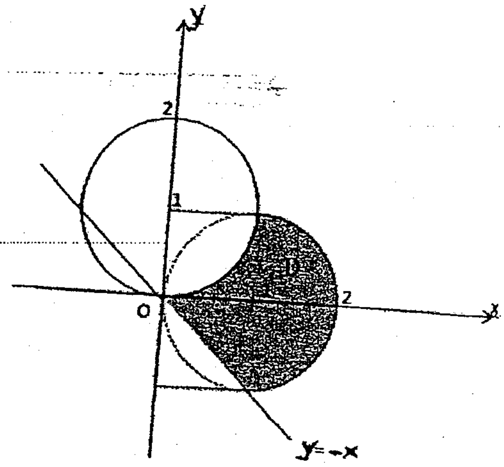
Durée : ½ heure

Date : 13/9/2011

Concours d'entrée en 2ème année
Année universitaire 2011-2012

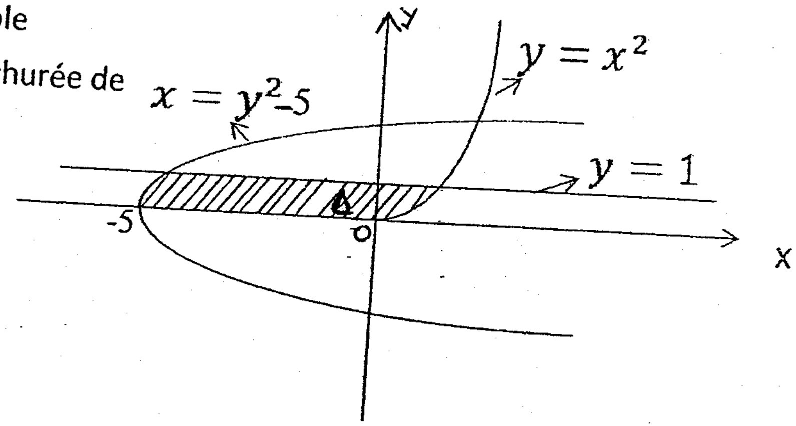
Matière: Mathématiques

I- [7 points]



1) Ecrire en coordonnées polaires l'intégrale double $\iint_D f(x,y)dx\,dy$,
où D est la partie hachurée de la figure ci-contre.

2) En utilisant les coordonnées cartésiennes, écrire de deux façons différentes l'intégrale double $\iint_\Delta f(x,y)dx\,dy$, où Δ est la partie hachurée de la deuxième figure.



II- [7 points]

Soit a un paramètre réel.

1) Ecrire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de t=0 de $g(t) = e^t + a\ln(1+t) - \sin(at)$

2) Déduire l'équation de l'asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ à la courbe représentative (C) de

$$f(x) = x\left[e^{1/x} + a\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \sin\left(\frac{a}{x}\right)\right]$$

et discuter suivant les valeurs de a la position relative de (C) par rapport à cette asymptote.

III- [6points] 1) Calculer l'intégrale suivante: $\int \cos x \ln(1-\cos x)\,dx$

2) a) Trouver $I(t) = \int \frac{t^2-1}{t^2+1}dt$.

b) Déduire $\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx$

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté de Médecine
Faculté de Pharmacie
Faculté de Médecine Dentaire

13 Septembre 2011
Durée : 30 minutes

CORRIGÉ PAGE 190

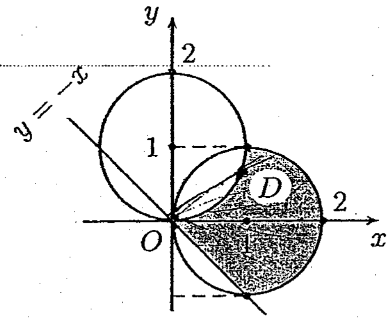
Concours d'admission en deuxième année
Année académique 2011-2012
Mathématiques

Exercice 1 — [7 pts]

1° Écrire en coordonnées polaires l'intégrale double

$$I = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

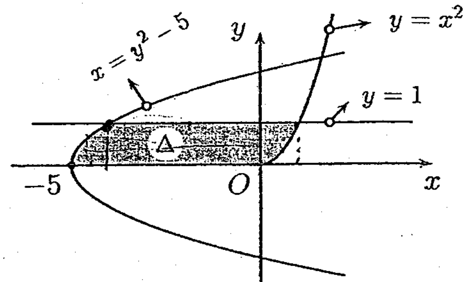
où D est la partie hachurée de la figure ci-contre.



2° En utilisant les coordonnées cartésiennes, écrire de deux façons différentes l'intégrale double

$$I = \iint_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

où Δ est la partie hachurée de la deuxième figure.



Exercice 2 — [7 pts]

Soit a un paramètre réel.

1° Écrire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $t = 0$ de

$$g(t) = e^t + a\ln(1+t) - \sin(at).$$

2° Déduire l'équation de l'asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ à la courbe représentative (C) de

$$f(x) = x\left[e^{\frac{1}{x}} + a\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - \sin\left(\frac{a}{x}\right)\right].$$

Discuter suivant les valeurs de a la position relative de (C) par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3 — **[6 pts]**

1° Calculer l'intégrale suivante : $\int \cos x \ln(1-\cos x)\,\mathrm{d}x$.

2° (a) Trouver $I(t) = \int \frac{t^2-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

(b) Déduire $J(x) = \int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

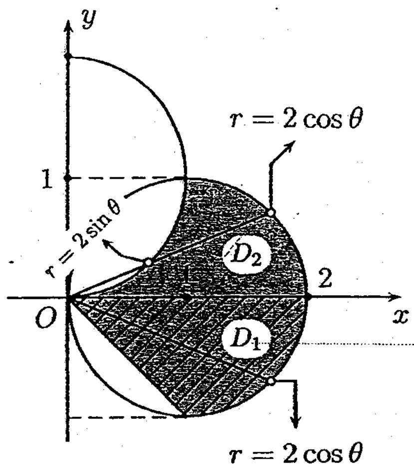
Exercice 1

1° En coordonnées polaires le domaine D est défini par

$$D = D_1 \cup D_2$$

avec $D_1 : \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq 0 \\ 0 \leq r \leq 2\cos\theta \end{cases}$

et $D_2 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ 2\sin\theta \leq r \leq 2\cos\theta \end{cases}$

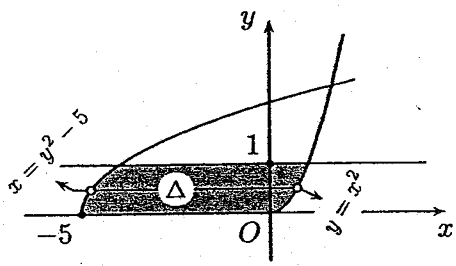


Ainsi :

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_{2\sin\theta}^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r.$$

2° **Première façon** : En fixant y (horizontalement), Δ est défini par :

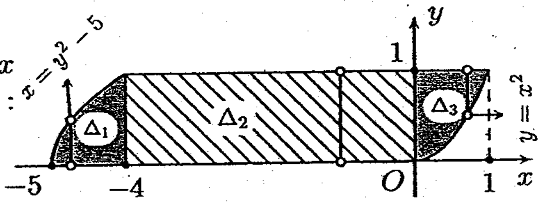
$$\Delta : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y^2 - 5 \leq x \leq \sqrt{y} \end{cases}$$



D'où $I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^2-5}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

Deuxième façon : En fixant x (verticalement), Δ est défini par :

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$$



avec

$\Delta_1 : \begin{cases} -5 \leq x \leq -4 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{x+5} \end{cases}$ $\quad \Delta_2 : \begin{cases} -4 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$ $\quad \Delta_3 : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 1 \end{cases}$

D'où

$$I = \int_{-5}^{-4} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x+5}} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{-4}^{0} \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Exercice 2

1° Au voisinage de $t = 0$ et à l'ordre 3 :

$$g(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + a\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right) - \left(at - \frac{a^3t^3}{6}\right) + t^3\varepsilon(t).$$

Ainsi

$$g(t) = 1 + t + \frac{1-a}{2}t^2 + \frac{1+2a+a^3}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t).$$

2° Posons $x = \dfrac{1}{t} \Rightarrow$ si $t \to 0_+$, $x \to +\infty$. Donc

$$tf\left(\frac{1}{t}\right) = g(t) = 1 + t + \frac{1-a}{2}t^2 + \frac{1+2a+a^3}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t)$$

et donc

$$f(x) = x + 1 + \frac{1-a}{2}\frac{1}{x} + \frac{1+2a+a^3}{6}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x).$$

$y = x + 1$ est l'équation de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ à (C).

- Pour $a \neq 1$: $f(x) - y \underset{+\infty}{\simeq} \dfrac{1-a}{2}\dfrac{1}{x}$, donc
  - pour $a < 1$, la courbe (C) est au-dessus de l'asymptote ;
  - pour $a > 1$, la courbe (C) est au-dessous de l'asymptote.
- Pour $a = 1$: $f(x) - y \underset{+\infty}{\simeq} \dfrac{1+2a+a^3}{6}\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2}{3x^2} > 0$, alors la courbe est au-dessus de l'asymptote.

Exercice 3

1° Intégrons par parties en posant :

$$u = \ln(1 - \cos x) \quad \text{et} \quad dv = \cos x \, dx$$

d'où

$$du = \frac{\sin x}{1 - \cos x}dx \quad \text{et} \quad v = \sin x.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int \cos x \ln(1 - \cos x) &= \sin x \ln(1 - \cos x) - \int \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}dx \\
&= \sin x \ln(1 - \cos x) - \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x}dx \\
&= \sin x \ln(1 - \cos x) - \int (1 + \cos x)\,dx \\
&= \sin x \ln(1 - \cos x) - x - \sin x + \text{cte}.
\end{aligned}$$

2° (a) $$\int \frac{t^2-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{(t^2+1)-2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t - 2\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$
$$= t - 2\arctan t + \text{cte}.$$

(b) En posant $t = \sin x$,

$$\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\arctan t - t + \text{cte}.$$

D'où : $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\arctan(\sin x) - \sin x + \text{cte}.$